XIXOLIMPIADA FIZYCZNA (1969/1970). Stopień W , zadanie doświadczalne – D.

Źródło: Olimpiady fizyczne XIX i XX

Autor: Waldemar Gorzkowski

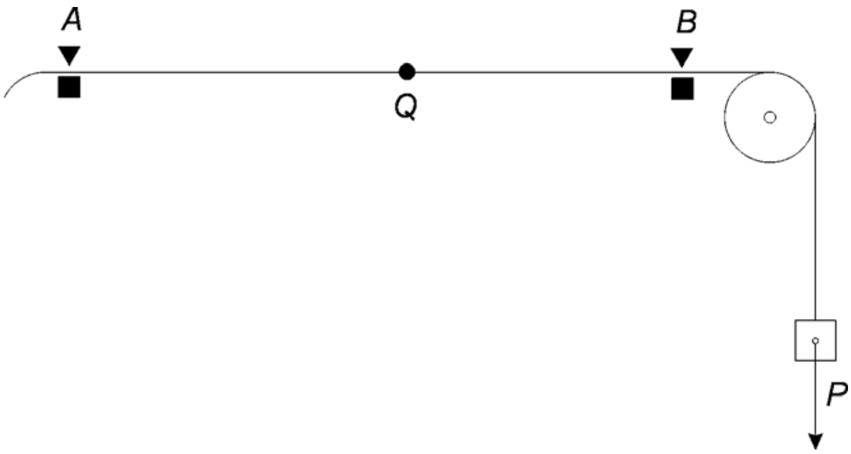
Nazwa zadania: Drgania gumy.

Działy: Drgania mechaniczne

Słowa kluczowe: guma, drgania, okres pionowych drgań

Zadanie doświadczalne - D, zawody stopnia wstępnego, XIX OF.

Dana jest guma o długości co najmniej $l = 1500\,\mathrm{mm}$ (najlepiej modelarska $5 \times 0{,}5\,\mathrm{mm}$) rozpięta tak, jak na rysunku 1. Ciężarek *Q* jest rzędu 100 G. Należy tak dobrać *Q* i *l*, by łatwo mierzyć okres *T* pionowych drgań ciężarka $Q(T > 0{,}5\,\mathrm{s})$. Znaleźć doświadczalną zależność *T* od *P*.



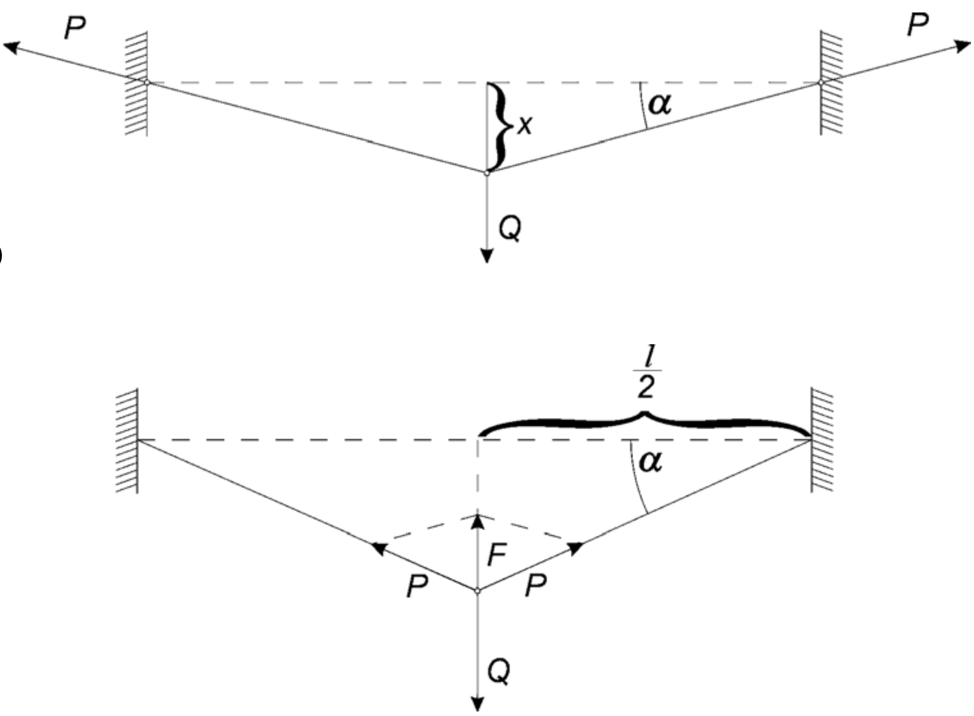
Rys. 1

Uwaga: Śruba *A* jest zamocowana na stałe. Śrubę *B* odkręcamy, gdy zmieniamy *P*, po czym do pomiaru znów dokręcamy. W czasie zmiany *P* ciężarek *Q* zdejmujemy. Należy zadbać o to, by ciężarek *Q* nie uzyskał „drgań własnych” niezależnych od drgań gumki.

Rozwiązanie

Zazwyczaj przed przystąpieniem do doświadczenia warto zbadać teoretycznie, jakich wyników można się spodziewać. Rozważania takie ułatwiają samo przeprowadzenie pomiarów, a także ich późniejsze opracowanie. Spróbujmy więc wyprowadzić wzór na okres drgań gumki. Załóżmy dla uproszczenia, że: 1) gumka jest cienka i nieważka, 2) ciężarek jest punktem materialnym, 3) drgania mają małą amplitudę w stosunku do długości gumki i 4) gumka jest tak napięta, że w położeniu równowagi jest prawie pozioma.

Jeżeli ciężarek wychylimy o niewielki odcinek *x* od położenia poziomego (rys 2 a), to w punktach zamocowania gumka odchyli się o niewielki kąt α. Długość gumki nie ulegnie przy tym prawie żadnej zmianie. Zatem po wychyleniu ciężarka, z każdej strony wzdłuż gumki będzie działać siła napinająca, praktycznie równa *P*.



a)

b)

Rys. 2 a, b

Tak więc, na ciężarek (o masie Q/g) wzdłuż gumek działają dwie siły o wartościach równych P (rys. 2 b). Wartość wypadkowa tych sił wynosi:

$$F = 2P\sin\alpha$$

W stanie równowagi $F = Q$. Odpowiada temu kąt $\alpha = \alpha_0$, taki że $\sin\alpha_0 = \frac{Q}{2P}$. Przyspieszenie ciężarka oznaczamy przez $\vec{\alpha}$. Mamy

$$\frac{Q}{g}a = Q - 2P\sin\alpha(\sin\alpha_0 - \sin\alpha) \approx 2P(\mathrm{tg}\alpha_0 - \mathrm{tg}\alpha) = -\frac{2P}{l/2}(x - x_0),$$

gdzie x_0 jest wartością x w położeniu równowagi. Skorzystaliśmy tu z fakt, że dla małych kątów zachodzi związek $\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha(\approx \alpha)$
Stąd:

$$\alpha = -\frac{4Pg}{Ql}(x - x_0).$$

Widzimy, że przyspieszenie ciężarka jest proporcjonalne do wychylenia od położenia równowagi $(x - x_0)$. Oczywiście przyspieszenie $\vec{a}$ jest skierowane ku położeniu równowagi. Zatem ciężarek będzie drgać ruchem harmonicznym.
W ruchu harmonicznym wartość przyspieszenia a wiąże się z wartością wychylenia od położenia równowagi x za pomocą związku

$$a = -\omega^2 x,$$

gdzie

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Porównując znaleziony przez nas wzór na przyspieszenie ze wzorem ogólnym otrzymujemy:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{4Pg}{Ql},$$

stąd

$$T = \pi\sqrt{\frac{Ql}{Pg}}.$$

Zatem powinniśmy oczekiwać, że $T \sim \frac{1}{\sqrt{P}}$.

Na początku powiedzieliśmy, że przy niewielkich wychyleniach długość gumki praktycznie nie ulega zmianie i dlatego napięcie gumki cały czas jest równe P. Nie jest to całkiem ścisłe i warto tej sprawie poświecić kilka słów. Otóż przy wychyleniu ciężarka długość gumki zmienia się z l na l' i zgodnie z prawem Hooke'a pojawia się dodatkowa siła sprężystości F_H (rys. 2 c). Siłę F_H należałoby dodać do siły P. Jak widać na rysunku

$$\Delta l = l' - l = l\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right),$$

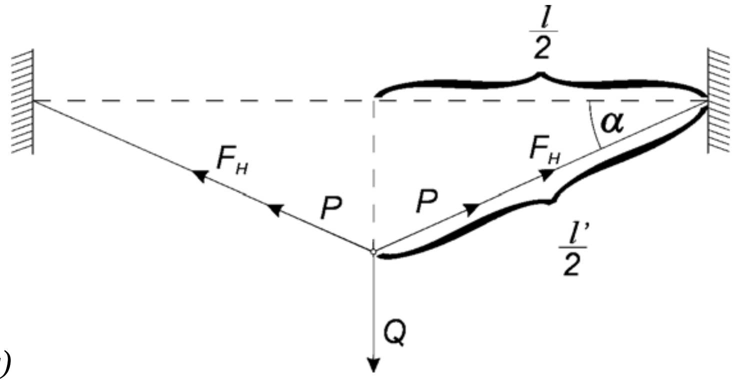
poza tym wiemy, że

$$F_H \sim \Delta l,$$

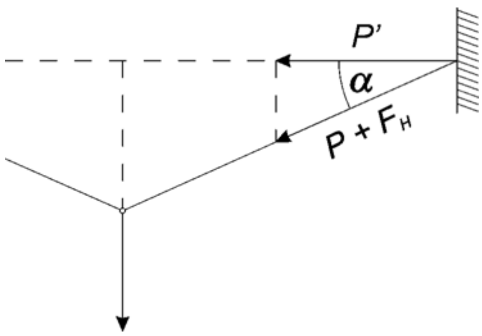
zatem

$$F_H \sim \left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right).$$

Widzimy, że jeżeli $\alpha \longrightarrow 0$, to F_H dąży do zera. Tak więc, jeżeli napięcie gumki P nie jest zbyt małe, to siłę F_H można zaniedbać.



c)



d)

Rys. 2 c, d

Gdyby napięcie gumki stale było równe *P*, to siła pozioma działająca na śruby byłaby równa *P* cosα, tj. byłaby mniejsza niż *P*. Nie zgadza się to z wynikami obserwacji. Dla przykładu, wieszając zbyt dużo bielizny na poziomo rozpiętym sznurze można wyrwać ze ścian haki, do których ten sznur jest przymocowany. Przez obciążenie sznura nie można zmniejszyć siły wyrywającej haki ze ścian. Można jednak wykazać, że po uwzględnieniu sił F_H, nawet gdy są one bardzo małe, siła pozioma działająca na śruby (siła *P'* na rys. 2 d) zawsze jest większa (lub równa) niż siła *P*. czytelnicy, którzy chcieliby to udowodnić, powinni wziąć pod uwagę fakt, że odległość między śrubami jest stała i przy zwiększeniu
P między śrubami znajduje się coraz mniejsza część całej gumki.
Na podstawie dotychczasowych rozważań doszliśmy do wniosku, że należy oczekiwać, iż okres *T* będzie proporcjonalny do $1/\sqrt{P}$. Jak taką zależność można stwierdzić doświadczeniem?

Zrobienie wykresu zależności *T*(*P*) jest niecelowe. Trudno bowiem byłoby z takiego wykresu odgadnąć, czy znaleziona krzywa ma postać $T \sim P^{-\frac{1}{2}}$, czy jakąś inna, podobną. W przypadkach analogicznych do rozpatrywanego możemy postępować następująco:

Robimy wykres $T^2\left(\frac{1}{P}\right)$. Krzywa na tym wykresie powinna być prosta przechodzącą przez początek układu. Na podstawie współczynnika nachylenia tej prostej można obliczyć współczynnik proporcjonalności w $T \sim 1/\sqrt{P}$.

Lub inaczej:
Robimy wykres zależności log*T*(log*P*). Na wykresie tym również otrzymujemy prosta. Nachylenie tej prostej powinno być takie samo, niezależnie od rodzaju układu doświadczalnego. Prosta ta będzie opisana równaniem

$$\log T = \log C - \frac{1}{2}\log P,$$

gdzie C jest stałą występującą przy $1/\sqrt{P}$ we wzorze na T. (Wartość tej stałej można wyznaczyć określając na wykresie punkt, w którym otrzymana prosta przecina oś współrzędnych).
Ogólnie biorąc, przy sprawdzaniu jakichś zależności metodami doświadczalnymi staramy się doprowadzić te zależność do postaci, dla których wykres jest inna prosta. Jest to spowodowane tym, że proste są szczególnie łatwe do badania. Zawsze przecież znacznie łatwiej stwierdzić, czy wykres jest częścią prostej, niż rozstrzygnąć czy jest częścią krzywej o równaniu $y = ax^{3/4}$, czy o równaniu $y = ax^{2/3}$, czy też o jakimś jeszcze innym.

Wróćmy jednak do zadania:
Technika przeprowadzania pomiarów jest tak prosta, że nie będziemy jej tu opisywać. Jeżeli chodzi o wyniki doświadczalne, to rzeczywiście obserwuje się proporcjonalność $T \sim 1/\sqrt{P}$, przy czym dla małych wartości P stwierdza się pewne odstępstwa: dla $P \longrightarrow 0$, T dąży nie do nieskończoności, lecz do pewnej wartości skończonej. Poza tym w miarę zmniejszania P na ogół wzrasta rozrzut punktów pomiarowych.
Co jest przyczyną tych odstępstw? Dla małych wartości P siła F_H staje się porównywalna, a nawet większa niż P i silne wpływa na ruch ciężarka; ruch odbywa się wtedy praktycznie tylko pod wpływem wypadkowej sil: F_H i ciężaru Q. Można wykazać, że dla $Q \neq 0$ ruch ciężarka jest ruchem harmonicznym, o ile tylko amplituda drgań jest dużo mniejsza od wychylenia x_0 w stanie równowagi. Wynika stąd, że dla $P \longrightarrow 0$, okres drgań
o dostatecznie małej amplitudzie powinien dążyć do pewnej stałej, co rzeczywiście obserwuje się w doświadczeniu.

Jeżeli amplituda drgań nie jest dostatecznie mała, to drgania (zarówno dla małych jak i dla dużych P) nie są harmoniczne. Okres takich drgań zależy od ich amplitudy. Przy wykonywaniu ćwiczenia warunki na to, by ruch ciężarka był ruchem harmonicznym, na ogół trudniej spełnić dla małych P, szczególnie, gdy gumka jest mało rozciągliwa. Z tego względu dla małych P drgania ciężarka często są ruchami nieharmonicznymi – ich okres zależy od amplitudy, która dla różnych serii pomiarów jest nieco inna. Wskutek tego dla małych P rozrzut punktów pomiarowych na ogół wzrasta. Oczywiście przy starannym wykonaniu ćwiczenia, gdy przestrzegamy tego, by drgania miały dostatecznie małą amplitudę, zjawiska tego nie obserwuje się.