XXI OLIMPIADA FIZYCZNA
ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

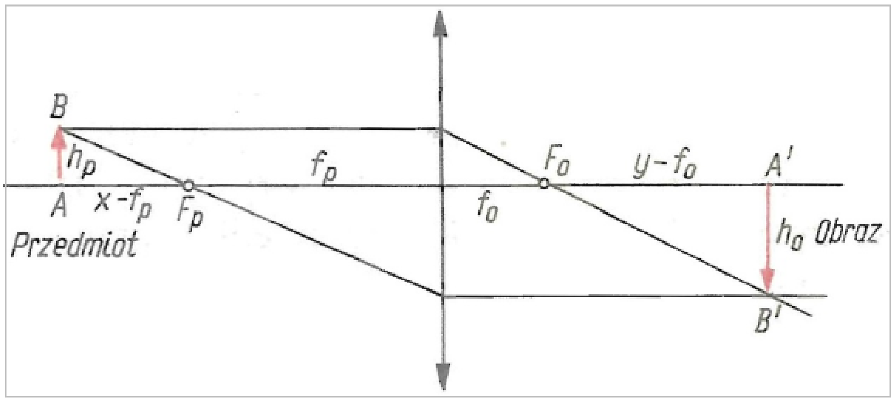
Nazwa zadania	Obraz przedmiotu znajdującego się w wodzie w akwarium ze ścianką z przyklejoną soczewką
Rok	1971/1972
Źródło	Komitet Główny Olimpiady Fizycznej; Andrzej Szymacha: Olimpiady Fizyczne XXI i XXII, WSiP, Warszawa 1975 W. Gorzkowski: Zbiór zadań z olimpiad fizycznych. WSiP, Warszawa 1987, zad. 5.4 T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Zadanie T2 - XXI OF, I stopień.

Przedmiot świecący znajduje się w wodzie w odległości x od ścianki akwarium, do której z zewnątrz przyklejono płasko-wypukłą soczewkę o ogniskowej w powietrzu równej f. Soczewka i ścianka naczynia są bardzo cienkie, współczynnik załamania wody wynosi 4/3, a – szkła 3/2. Przedmiot znajduje się na osi optycznej soczewki. Znajdź i przedyskutuj położenie y obrazu w zależności od położenia przedmiotu. W szczególności znajdź powiększenie i położenie obrazu dla $x = f$. Czy i jak zmieniałaby się sytuacja, gdyby soczewkę przyklejono do ścianki od wewnątrz akwarium?

Rozwiązanie zadania T2 - XXI OF, I stopień.

Jeżeli pewien układ optyczny, np. cienka soczewka, znajduje się na granicy dwóch ośrodków o różnych współczynnikach załamania, to okazuje się, że ogniskowa układu dla wiązki promieni równoległych biegnących z ośrodka 1 do ośrodka 2 jest inna niż odległość ogniskowa dla wiązki promieni biegnących ze strony ośrodka 2 do ośrodka 1. Przyjmijmy, że tak istotnie jest i zbadajmy, czy znajomość tych dwóch ogniskowych f_0 i f_p (Rysunek 1) pozwala na konstruowanie obrazu, to znaczy, czy można wyznaczyć położenie i powiększenie obrazu.



Rysunek 1:

Poprowadźmy z punktu B przedmiotu dwa promienie – jeden przechodzący przez ognisko F_p, drugi równoległy do osi optycznej. Pierwszy promień po załamaniu będzie równoległy do osi, drugi zaś przejdzie przez ognisko F_o. Oznaczmy ponadto, jak zwykle, odległość przedmiotu od płaszczyzny soczewki literą x, a odległość obrazu literą y. Wysokość przedmiotu oznaczmy h_p, a obrazu h_o. Z podobieństwa odpowiednich trójkątów mamy:

$$\frac{h_p}{x-f_p} = \frac{h_p}{f_p}, \qquad \frac{h_p}{f_o} = \frac{h_o}{y-f_o}. \tag{1}$$

Dzieląc te dwie równości stronami dostajemy:

$$\frac{f_o}{x-f_p} = \frac{y-f_o}{f_p}. \tag{2}$$

Przekształćmy ten wzór do postaci najbardziej przypominającej znany wzór soczewkowy. W tym celu przyrównajmy iloczyny wyrazów skrajnych i środkowych w powyższej proporcji:

$$f_of_p = xy - f_py - f_ox + f_of_p. \tag{3}$$

Po zredukowaniu wyrazu f_of_p występującego po obu stronach powyższej równości, podzieleniu obu stron równości przez xy i odpowiednim uporządkowaniu dostajemy:

$$\frac{f_p}{x} + \frac{f_o}{y} = 1. \tag{4}$$

Korzystając z jednej z proporcji (1) i wzoru (4) możemy łatwo wyznaczyć powiększenie obrazu w:

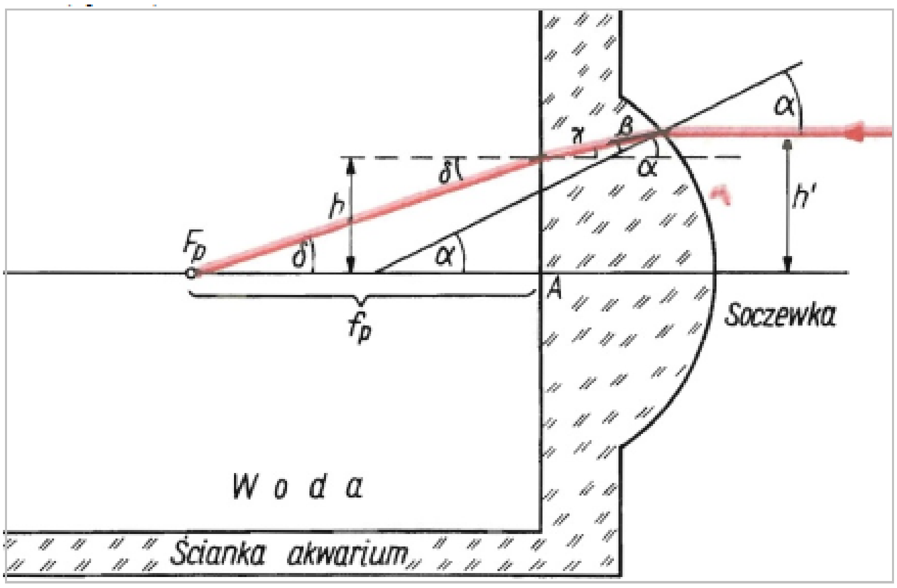
$$w = \frac{h_o}{h_p} = \frac{y-f_o}{f_o} = \frac{1-\frac{f_o}{y}}{\frac{f_o}{y}} = \frac{\frac{f_p}{x}}{\frac{f_o}{y}} = \frac{y}{x}\frac{f_p}{f_o}. \tag{5}$$

Jak widzimy, wzory (4) i (5) pozwalają sprowadzić nasze zadanie do problemu wyznaczenia ogniskowych f_o i f_p.

Zajmijmy się przypadkiem soczewki przyklejonej do zewnętrznej ścianki akwarium. Równoległa wiązka promieni biegnąca z lewej strony na prawą nie ulega żadnemu załamaniu przy przejściu z wody do szkła. Jasne jest, że ogniskowa f_o będzie w tym wypadku równa po prostu zwyczajnej ogniskowej tej soczewki w powietrzu:

$$f_o = f. \tag{6}$$

Trochę więcej kłopotu sprawi nam wyznaczenie ogniskowej f_p . Sporządźmy w tym celu dokładny rysunek (Rysunek 2).



Rysunek 2:

Jak zwykle dla wiązek trzyosiowych i cienkich soczewek zakładamy, że wszystkie kąty α, β, γ, δ są bardzo małe. Z twierdzenia o kącie zewnętrznym trójkąta:

$$\alpha = \beta + \gamma. \tag{7}$$

Z prawa Snelliusa

$$n_s = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \approx \frac{\alpha}{\beta}, \tag{8}$$

$$\frac{n_s}{n_w} = \frac{\sin\delta}{\sin\gamma} \approx \frac{\delta}{\gamma}. \tag{9}$$

Odczytujemy ponadto z rysunku, że:

$$\sin\alpha = \frac{h'}{R} \approx \alpha, \tag{10}$$

$$\mathrm{tg}\delta = \frac{h}{f_p} \approx \delta. \tag{11}$$

Ponieważ soczewka jest cienka, więc $h \approx h'$. Z wzorów (8), (9), (10) i (11) możemy obliczyć f_p:

$$f_p \approx \frac{h}{\delta} \approx \frac{h}{\gamma\frac{n_s}{n_w}} = \frac{hn_w}{n_s(\alpha-\beta)} = n_w\frac{R\alpha n_w}{n_s\left(\alpha - \frac{\alpha}{n_s}\right)} = n_w\frac{R}{n_s-1} = n_w f. \tag{12}$$

Podstawiając znalezione wartości f_o i f_p [wzory (6) i (12)] do wzorów (4) i (5) dostajemy:

$$\frac{n_w}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}, \qquad w = \frac{y}{x'}. \tag{13}$$

Jeżeli oznaczymy $x' = \frac{x}{n_w}$, to wzory powyższe przyjmą postać:

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}, \qquad w = \frac{y}{x'},$$

formalnie identyczną z wzorami dla tej soczewki w powietrzu. Pozwala to natychmiast skorzystać ze zwykłych, dobrze znanych wyników dla soczewki w powietrzu:

$$\text{a) } x' > 2f, \qquad \left(x > 2fn_w = \frac{8}{3}f\right)$$

obraz rzeczywisty, pomniejszony, odwrócony, w odległości y, $2f > y > f$,

$$\text{b) } 2f > x' > f, \qquad \left(\frac{8}{3}f > x > \frac{4}{3}f\right)$$

obraz rzeczywisty, powiększony, odwrócony, w odległości $y > 2f$,

$$\text{c) } f > x', \qquad \left(\frac{4}{3}f > x\right)$$

obraz pozorny, powiększony, prosty, po tej samej stronie co przedmiot.

Przypadek $x = f$ należy teraz do przedziału c): $x' < f/n_w < f$. Zatem dla przedmiotu położonego w odległości $x = f$ dostaniemy obraz pozorny, prosty, powiększony. Odległość obrazu łatwo obliczyć

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{f} - \frac{n_w}{x} = -(n_w - 1)\frac{1}{f} \Rightarrow y = -\frac{f}{n_w - 1}$$

Powiększenie w tym szczególnym przypadku wynosi:

$$w = n_w \frac{y}{x} = -n_w \frac{f}{(n_w - 1)f} = -\frac{n_w}{n_w - 1} = -\frac{4/3}{1/3} = -4$$

Obraz będzie czterokrotnie powiększony. Znak minus przypomina, że obraz będzie pozorny. Gdyby w akwarium nie było wody, to dla $x = f$ nie otrzymalibyśmy w ogóle obrazu w skończonej odległości od soczewki.

Przypadek soczewki przyklejonej do wewnętrznej ścianki akwarium będzie różnił się ilościowo, choć nie jakościowo, od przypadku dotychczas rozpatrzonego. Ogniskową f_p można obliczyć, opierając się na tych bardzo prostych argumentach. Jasne jest, że wiązka promieni równoległych padająca z zewnątrz nie ulegnie załamaniu na ściance akwarium. Taka sama sytuacja miałaby miejsce, gdyby po obu stronach soczewki znajdowała się woda. W tym ostatnim jednak przypadku moglibyśmy stosować zwykły wzór na ogniskową soczewki o współczynniku załamania $n = \frac{n_s}{n_w}$, zatem:

$$\frac{1}{f_p} = \left(\frac{n_s}{n_w} - 1\right)\frac{1}{R} = \left(\frac{n_s}{n_w} - 1\right)\frac{1}{n_s - 1}\frac{n_s - 1}{R} = \frac{\frac{n_s}{n_w} - 1}{n_s - 1}\frac{1}{f},$$

$$f_p = n_w \frac{n_s - 1}{n_s - n_w} f. \tag{14}$$

W celu obliczenia f_o moglibyśmy postąpić podobnie jak poprzednio, kiedy soczewka była przyklejona na zewnątrz. Żeby jednak nie zanudzić czytelnika zastosujemy tu inną, nieco prostszą, choć może mniej ścisłą metodę. Rozpatrujemy wiązkę promieni równoległych padających z wnętrza akwarium. Gdyby tuż za soczewką nie kończyło się akwarium, to promienie te przecięłyby się w odległości f_p przed chwilą obliczonej. Punkt ten możemy traktować jako nowy przedmiot odległy o $x_1 = -f_p$ od ścianki akwarium. Wyobraźmy sobie teraz, że na zewnętrznej ściance znajduje się jeszcze jedna soczewka o zerowej zdolności skupiającej. Stosując wzór (13), do którego podstawimy $\frac{1}{f} = 0,\ x = -f_p$, obliczymy ostatecznie położenie obrazu będące niczym innym jak szukaną przez nas wielkością f_o. A zatem:

$$\frac{1}{f_o} = 0 - \frac{n_w}{x} = +\frac{n_w}{f_p} = \frac{n_s - n_w}{n_s - 1}\frac{1}{f},$$

skąd

$$f_o = \frac{n_s - 1}{n_s - n_w} f = F. \tag{15}$$

Oznaczmy teraz

$$\frac{n_s - 1}{n_s - n_w} f = F.$$

W przypadku soczewki przyklejonej do wewnętrznej ścianki akwarium możemy napisać:

$$f_p = n_w F, \qquad f_o = F.$$

Wzory (16) różnią się od wzorów (6) i (12) dla soczewki umieszczonej na zewnątrz jedynie zastąpieniem symbolu f przez F. Możemy to sformułować tak, że soczewka o ogniskowej w powietrzu równej f, umieszczona wewnątrz akwarium równoważna jest soczewce umieszczonej na zewnątrz akwarium, ale o ogniskowej w powietrzu równej

$$F = \frac{n_s - 1}{n_s - n_w} f = 3f.$$

Na zakończenie obliczmy jeszcze powiększenie przedmiotu znajdującego się w odległości f od soczewki umieszczonej we wnętrzu akwarium. Trzeba w tym celu posłużyć się wzorami (13), w których f zastąpimy przez $F = 3f$,

$$\frac{n_w}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{F}, \qquad w = n_w \frac{y}{x} \tag{16}$$

Kładąc $x = f,\ F = 3f,\ n_w = \frac{4}{3}$, mamy

$$\frac{4/3}{f} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3f},$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{3f} - \frac{4}{3f} = -\frac{1}{f},$$

$$y = -f,$$

$$w = \frac{4}{3}\frac{-f}{f} = -\frac{4}{3}.$$

Obraz i teraz jest pozorny, prosty, ale powiększony jedynie w stosunku 4:3.