XXI OLIMPIADA FIZYCZNA
(1971/1972)
ZAWODY III STOPNIA
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Zadanie teoretyczne – T1

Nazwa – Analiza drgań dwóch ciał na płaszczyźnie połączonych sprężyną.

Źródła – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej
– Andrzej Szymacha, *Olimpiady Fizyczne XXI i XXII*, WSiP, Warszawa 1975, s. 68–73
– Waldemar Gorzkowski[1], *Zbiór zadań z olimpiad fizycznych. Zadania rachunkowe wraz z rozwiązaniami*, wyd. 2 zm., WSiP, Warszawa 1987, zad. 3.4, s. 38, 109–112
– T.M. Molenda, www.OF.szc.pl.

Dwa nieduże ciała o masach m_1 i m_2 połączono jednorodną sprężyną o stałej sprężystości k i położono na poziomym gładkim stole. Sprężynkę rozciągnięto przez rozsunięcie obu ciał, a następnie oba ciała jednocześnie puszczono. Układ zaczął drgać wzdłuż linii prostej. Jakie to są drgania i jaki jest ich okres?

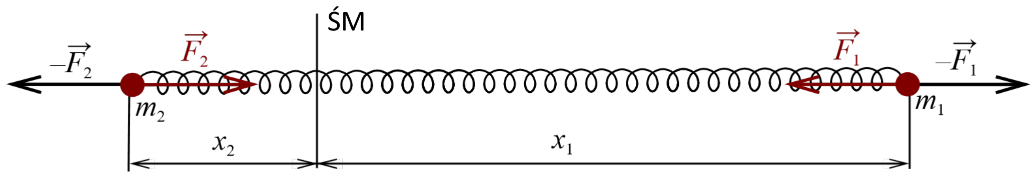
[1] Dr Waldemar Gorzkowski był wieloletnim sekretarzem naukowym ds. zadań w KGOF w XIX−XXXVII OF, z przerwą od II st. XXX OF do końca XXXI OF, autor i współautor bardzo wielu artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF i książek z zadaniami OF, w tym międzynarodowej OF. Bardzo zasłużony dla naszej olimpiady fizycznej jak i międzynarodowej gdzie, od 1983 r., pełnił funkcję Sekretarza Generalnego, później przemianowaną na funkcję prezesa, którą sprawował do śmierci w 2007 r. (www.kgof.edu.pl/50MOF/historia.php); prowadził również międzynarodowy konkurs prac uczniowskich *First Step to Nobel Prize in Physics*. Za osiągnięcia został uhonorowany *Nagrodą Polskiego Towarzystwa Fizycznego im. Krzysztofa Ernsta za Popularyzację Fizyki* (przyp. red.).

Rozwiązanie zadania T1 — XXI OF, III stopień, część teoretyczna

Decydującą rolę w rozwiązaniu tego zadania odgrywa fakt, że układ dwóch mas wraz z łączącą je sprężynką jest w naszym zadaniu – z praktycznego punktu widzenia – układem izolowanym. Wprawdzie działają na niego zewnętrzne siły ciężkości i siły reakcji podłoża, ale siły te równoważą się. W kierunku poziomym nie działają żadne siły zewnętrzne, gdyż zgodnie z warunkami zadania tarcie można zaniedbać.

Jak wiadomo, środek masy układu izolowanego pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Początkowo, tj. w chwili zwalniania napiętej sprężynki, środek masy spoczywał, a więc będzie on spoczywał cały czas, dopóki jakieś siły przyłożone z zewnątrz nie zmienią tego stanu.

Dzięki temu, że środek masy pozostaje nieruchomy przez cały czas trwania ruchu, wygodnie jest liczyć położenie obu ciał względem tego punktu, tak jak pokazano na rys. 1, gdzie ŚM oznacza środek masy, na rys. zaznaczono również siły działające w rozpatrywanym układzie.



Rys. 1. Siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ przyłożone są do mas, siły $-\vec{F}_1$ i $-\vec{F}_2$ są przyłożone do sprężynki, ŚM oznacza środek masy

Zgodnie z III zasadą dynamiki (zasadą akcji i reakcji), jeżeli sprężynka działa na masę m_1 siłą $\vec{F}_1$, to masa m_1 działa na sprężynkę siłą $-\vec{F}_1$. Podobnie na drugim końcu sprężynki – na masę m_2 działa siła $\vec{F}_2$, a na sprężynkę siła $-\vec{F}_2$.

Warto tu wspomnieć o częstym błędzie logicznym popełnianym przez bardzo wiele osób i to nie tylko uczniów szkół średnich, polegającym na stwierdzeniu, że na mocy III zasady dynamiki powinno być $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. To wcale nie prawda! W problemie takim, jak tu rozpatrywany, masy m_1 i m_2 wcale ze sobą bezpośrednio nie oddziałują! Związek $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ dostajemy dopiero w szczególnym przypadku granicznym, nie mającym nic wspólnego z III zasadą, mianowicie jeżeli założymy, że sprężynka jest nieważka. Wtedy z II zasady dynamiki mamy:

$$(\text{masa sprężynki} = 0) \cdot (\text{przyspieszenie sprężynki}) = -\vec{F}_1 - \vec{F}_2.$$

Ponieważ lewa strona jest równa zeru niezależnie od tego, jakie jest przyspieszenie sprężynki, to i prawa strona musi być równa zeru. Nieważkość sprężynki powoduje, że można o niej zapomnieć i traktować siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ jako oddziaływania między punktami materialnymi, zmieniającymi się według określonego prawa w zależności od odległości i spełniającymi III zasadę dynamiki.

Podsumowując: całkowita siła działająca na sprężynkę wynosi $-\vec{F}_1 - \vec{F}_2$. Siła ta musi być równa zeru, gdyż w przeciwnym przypadku nieważka sprężynka musiałaby doznawać nieskończonego przyspieszenia. Mamy więc

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \tag{1}$$

Środek masy dzieli odległość między ciałami w stosunku odwrotnym do ich mas:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{m_1}{m_2}. \tag{2}$$

Gdyby sprężynka była nie napięta, to wielkości x_1 i x_2 miałyby wartości x_{10} i x_{20} określone wzorami:

$$\frac{x_{20}}{x_{10}} = \frac{m_1}{m_2},$$

$$x_{10} + x_{20} = l_0, \tag{3}$$

gdzie l_0 jest długością sprężynki nie napiętej.
Stąd

$$x_{10} = \frac{l_0}{1+\dfrac{m_1}{m_2}}, \qquad x_{20} = \frac{l_0}{1+\dfrac{m_2}{m_1}}, \tag{4}$$

Oznaczając odchylenia ciał od położeń równowagi przez Δx_1 i Δx_2, otrzymujemy:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_{10} = x_1 - \frac{l_0}{1+m_1/m_2},$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_{20} = x_2 - \frac{l_0}{1+m_2/m_1}. \tag{5}$$

Siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ działające na poszególne ciała mają wartość równą $k(x_1 + x_2 - l_0)$, co można zapisać następująco:

$$F_1 = k(x_1 + x_2 - l_0) = k\left[x_1\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) - l_0\right] = k\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\Delta x_1,$$

$$F_2 = k(x_1 + x_2 - l_0) = k\left[x_2\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right) - l_0\right] = k\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\Delta x_2. \tag{6}$$

Uwzględniając zwroty sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ możemy napisać równania wyrażające II zasadę dynamiki dla każdego z ciał. Mamy:

$$m_1 a_1 = -k\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\Delta x_1, \quad m_2 a_2 = -k\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\Delta x_2, \tag{7}$$

gdzie a_1 i a_2 oznaczają przyspieszenia mas m_1 i m_2. Wobec tego:

$$a_1 = -k\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\Delta x_1, \quad a_2 = -k\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\Delta x_2. \tag{8}$$

Są to dwa niezależne równania opisujące drgania harmoniczne. W ruchu harmonicznym między przyspieszeniem a i wychyleniem z położenia równowagi Δx zachodzi związek

$$a = -\omega^2 \Delta x, \tag{9}$$

gdzie $\omega = 2\pi/T$, T – okres drgań.

Korzystając z powyższej zależności bez trudu stwierdzamy, że obydwa ciała będą drgały z tym samym okresem równym

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}, \tag{10}$$

gdzie μ spełnia związek

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{11}$$

Zauważona wyżej równość okresów drgań obu ciał jest oczywista – w przeciwnym wypadku środek masy nie mógłby być nieruchomy.

Okres drgań obciążnika o masie m zawieszonego na sprężynie o stałej k wynosi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \tag{12}$$

Widzimy, że wielkość μ spełnia rolę masy. Nazywa się ona masą zredukowaną układu dwóch ciał. Każde z rozważanych ciał drga z takim samym okresem jak ciało o masie μ zawieszone na sprężynie o stałej k.

Ponieważ prędkości początkowe obu ciał były równe zeru, więc wielkości Δx_1 i Δx_2 muszą zmieniać się według wzorów:

$$\Delta x_1 = A\cos\frac{2\pi}{T}t, \qquad \Delta x_2 = B\cos\frac{2\pi}{T}t, \tag{13}$$

gdzie czas t liczony jest od momentu zwolnienia sprężynek.
Ponadto, z (2), Δx_1 i Δx_2 muszą spełniać związek

$$\frac{x_{10} + \Delta x_1}{x_{20} + \Delta x_2} = \frac{m_2}{m_1}, \tag{14}$$

czyli

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{m_2}{m_1}, \tag{15}$$

gdyż $m_1 x_{10} = m_2 x_{20}$. Wynika stąd, że między stałymi A i B opsującymi początkowe wychylenie ciał od położeń równowagi spełniona jest relacja

$$\frac{A}{B} = \frac{m_2}{m_1}. \tag{16}$$

Możemy więc przyjąć, że

$$A = C\frac{m_2}{m_1 + m_2} = C\frac{\mu}{m_1}, \tag{17}$$

$$B = C\frac{m_1}{m_1 + m_2} = C\frac{\mu}{m_2}, \tag{18}$$

gdzie C jest stałą zależną od stopnia rozciągnięcia sprężynki przed jej wprawieniem w ruch.

Możemy teraz wyznaczyć zależność x_1 i x_2 od czasu:

$$x_1 = x_{10} + \Delta x_1 = \frac{\mu}{m_1}l_0 + \frac{\mu}{m_1}C\cos\frac{2\pi}{T}t,$$

$$x_2 = x_{20} + \Delta x_2 = \frac{\mu}{m_2}l_0 + \frac{\mu}{m_2}C\cos\frac{2\pi}{T}t. \tag{19}$$

Odległość między ciałami jest sumą x_1 i x_2, a zatem

$$x = l_0 + C\cos\frac{2\pi}{T}t. \tag{20}$$

Pamiętając, że T zależy od masy zredukowanej, możemy nasz końcowy wynik skomentować w następujący sposób. Gdybyśmy masę m_2 przyjęli za początek układu odniesienia (mimo że nie byłby to układ inercjalny), to wielkość x byłaby współrzędną masy m_1 w tym układzie odniesienia. Zmiana tej współrzędnej, czyli ruchu ciała o masie m_1 względem ciała o masie m_2 jest taki sam, jaki byłby ruch ciała o masie zredukowanej μ pod wpływem rzeczywistej siły F w prawdziwym już układzie inercjalnym. To zastąpienie masy m_1 przez masę zredukowaną μ koryguje całkowicie nieinercjalność układu odniesienia. Nietrudno zrozumieć, że jest to twierdzenie całkowicie ogólne dla dowolnego układu izolowanego dwóch ciał poruszającego się pod wpływem sił wewnętrznych spełniających prawo akcji i reakcji. Nosi ono nazwę twierdzenia o *redukcji zagadnienia dwóch ciał do zagadnienia jednego ciała* i znajduje powszechne zastosowanie w astronomii oraz w fizyce atomowej i jądrowej.

Jeśli gdzieś w podręczniku znajdziecie zdanie: ,,Przyjmijmy dla uproszczenia, że proton w atomie wodoru (lub Słońce w zagadnieniu Keplera) spoczywa w inercjalnym układzie odniesienia" – po czym następują jakiekolwiek obliczenia obarczone piętnem niedokładności, to pamiętajcie, że możecie ten błąd całkowicie skorygować zastępując w końcowych wzorach masę elektronu (czy też planety) masą zredukowaną rozpatrywanego układu dwóch ciał. Warto jeszcze zauważyć, że jeśli jedno z ciał (np. proton) ma masę dużo większą od drugiego (elektronu), a więc kiedy nieinercjalność układu z nim związanego jest mało istotna, to oczywiście różnica między masą zredukowaną a masą m_2 jest bardzo niewielka. Widać to natychmiast, jeśli wzór (11) na masę zredukowaną przepiszemy w innej, często spotykanej postaci

$$\mu = m_1 \frac{1}{1 + m_1/m_2}.$$