XXI OLIMPIADA FIZYCZNA
(1972/1973)
ZAWODY STOPNIA WSTĘPNEGO
CZĘŚĆ DOŚWIADCZALNA

Zadanie doświadczalne – D

Nazwa – Wyznaczanie częstości prądu w sieci elektrycznej.

Źródła – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej
– Andrzej Szymacha, *Olimpiady Fizyczne XXI i XXII*, WSiP, Warszawa 1975
– T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Masz do dyspozycji:

- woltomierz i amperomierz prądu przemiennego,
- oporniki o znanych wartościach,
- kondensatory radiowe o znanych wartościach,
- baterię o znanej sile elektromotorycznej,
- transformator sieciowy dający źródło napięcia nie przekraczające 30 V.

Zaproponuj metodę wyznaczania częstości prądu w sieci. Dobierz odpowiednie wartości oporów, pojemności i wykonaj możliwie jak najdokładniejszy pomiar tej częstości.

Uwaga!
Ze względu na bezpieczeństwo transformator sieciowy nie może dawać napięcia przekraczającego 30 V.

Rozwiązanie zadania D – XXI OF, stopień wstępny, część doświadczalna

Część teoretyczna

Podstawą pomiaru częstości w tym zadaniu są związki między amplitudą siły elektromotorycznej przyłożonej do układu złożonego z kondensatorów i oporów omowych, a amplitudą prądu zmiennego, który płynie przez układ. Wyprowadźmy te wzory dla dwóch typowych połączeń: równoległego (**A**) oraz szeregowego (**B**).

Połączącnie równoległe A

Oznaczmy ładunek na jednej z okładek kondensatora przez Q. Z definicji prądu jako ładunku przepływającego w jednostce czasu mamy

$$I_1 = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

gdzie napięcie na kondensatorze równe jest oczywiście w każdej chwili wartości siły elektromotorycznej prądu zmiennego, którą przyjmiemy jako równą $E_0 sin(\omega t)$ co daje nam równanie

$$\frac{Q}{C} = E_0 \sin(\omega t). \tag{2}$$

Następnie powinniśmy zróżniczkować to równanie oraz uwzględnić równanie (1). Powinniśmy otrzymać w rezultacie równanie opisujące zależność

$$\frac{I_1}{C} = E_0 \omega \sin(\omega t). \tag{3}$$

Następnie do obliczenia prądu I_2 użyjemy prawa Ohma. Opiszemy go wzorem (4)

$$I_2 = \frac{E_0 \sin(\omega t)}{R}. \tag{4}$$

Aby uzyskać prąd całkowity zsumujemy prądy I_1 oraz I_2. W tym momencie I wyrażamy poprzez

$$I = I_1 + I_2 = E_0 C \omega \sin(\omega t). \tag{5}$$

Ze względu na przesunięcie w fazie o $\pi/2$ między prądem płynącym przez kondensator a prądem płynącym przez opór nie możemy dodać po prostu amplitud prądów I_1 i I_2. Posługując się właściwościami funkcji trygonometrycznych możemy jednak otrzymany wzór na I przekształcić tak, by można było z niego odczytać amplitudę natężenia prądu I. Definiujemy w tym celu pomocniczy kąt δ:

$$\cos\delta = \frac{\frac{E_0}{R}}{\sqrt{\left(\frac{E_0}{R}\right)^2 + (E_0 C \omega)^2}}, \quad \sin\delta = \frac{E_0 C \omega}{\sqrt{\left(\frac{E_0}{R}\right)^2 + (E_0 C \omega)^2}}. \tag{6}$$

Co pozwala nam przekształcić równanie (5) do postaci

$$I = \sqrt{\left(\frac{E_0}{R}\right)^2 + (E_0 C \omega)^2 (\cos(\omega t)\sin\delta + \sin(\omega t)\cos\delta)} = E_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2\omega^2 \sin(\omega t + \delta)}. \tag{7}$$

Prąd wypadkowy ma amplitudę

$$I_0 = E_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2 \omega^2}, \tag{8}$$

i wyprzedza w fazie siłę elektromotoryczną o kąt δ określony wzorami (6). Wielkość

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2\omega^2}}, \tag{9}$$

grająca rolę analogiczną do zwykłego oporu w prawie Ohma dla prądu stałego, nosi nazwę zawady zastępczej dla rozpatrywanego przez nas układu. Jak łatwo odczytać ze wzoru (9), zawada samego kondensatora wynosi

$$Z_c = \frac{1}{C\omega}. \tag{10}$$

Należy podkreślić, że zawadami rzeczywistymi(a więc określającymi jedynie amplitudy prądów zmiennych) nie zawsze można posługiwać się tak, jak zwykłymi oporami w przypadku prądów stałych. Na przykład w naszym problemie naiwne zastosowanie wzoru (10) i prawa składania oporów równoległych doprowadziłoby nas do wyniku

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_c} + \frac{1}{R} = \frac{1}{R} + C\omega. \tag{11}$$

Wiemy jednak po udowodnieniu równania (9), że dany wynik jest fałszywy.

Połączene szeregowe B

Po dość dokładnym rozpatrzeniu przypadku **A** możemy sobie teraz pozwolić na znacznie pobieżniejsze rozwiązanie drugiego obwodu. Z prawa Kirchhoffa mamy

$$RI + \frac{Q}{C} = E_0 \sin(\omega t). \tag{12}$$

Ponieważ nie wiemy z góry, jakie jest przesunięcie fazowe prądu I piszemy ogólnie

$$I = I_0 \sin(\omega t + \delta), \tag{13}$$

gdzie I_0 oraz δ są wartościami do wyznaczenia. Następnie różniczkując wzór (12) uzyskujemy

$$I_0 R\omega \cos(\omega t + \delta) + \frac{I_0}{C} \sin(\omega t + \delta) = E_0 \omega \cos(\omega t). \tag{14}$$

Definiujemy

$$\cos\delta' = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}}, \quad \sin\delta' = \frac{\frac{1}{C\omega}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}}, \tag{15}$$

co pozwala nam przepisać (14) w postaci

$$I_0\omega\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}[\cos\delta' \cos(\omega t + \delta) + \sin\delta' \sin(\omega t + \delta)] = E_0\omega\cos\omega t \tag{16}$$

lub jeszcze upraszczając

$$I_0 \cos[\omega t + \delta - \delta'] = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}} \cos\omega t. \tag{17}$$

Równanie powyżej (17) będzie spełnione, jeśli

$$\delta = \delta' \quad \text{oraz} \quad I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}}. \tag{18}$$

Tak więc dla układu **B**, zawadę opiszemy równaniem

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}. \tag{19}$$

Jeżeli teraz przyjrzymy się wzorom (8) i (18) i uświadomimy sobie, że we wzorach tych z wyjątkiem ω wszystkie wielkości są bądź nam znane, bądź mogą być łatwo zmierzone za pomocą woltomierza i amperomierza, to powinno już być jasne, że można w ten sposób wyznaczyć wielkość ω. Źródło stałej siły elektromotorycznej służyć miało do ewentualnego sprawdzenia, czy upływność kondensatora, jakim dysponował uczeń, nie była na tyle duża, by trzeba ją było uwzględnić w obliczeniach jako dodatkowy opór połączony równolegle z właściwym kondensatorem.