

XXII OLIMPIADA FIZYCZNA

(1972/1973)

ZAWODY II STOPNIA

CZEŚĆ DOŚWIADCZALNA

Zadanie doświadczalne – D

Nazwa – Wyznaczanie współczynnika tarcia tarcia stalowych kulek o szkło staczających się z równi.¹

Źródła – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej

- Andrzej Szymacha: *Olimpiady Fizyczne XXI i XXII*. WSiP, Warszawa 1975
- Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki: *Olimpiada fizyczna. Wybrane zadania doświadczalne z rozwiązaniami. Stowarzyszenie Symetria i Własności Strukturalne*, Poznań 1994 (zad. 2)
- T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Masz do dyspozycji:

- równie pochyłą o regulowanym kącie nachylenia (płyta szklana),
- stół,
- kulkę stalową,
- linijkę,
- pion,
- papier milimetrowy,
- kalkę maszynową,
- kilka arkuszy gładkiego papieru,
- szmatkę lekko zwilżoną olejem (do przecierania kulki).

Wyznacz współczynnik tarcia poślizgowego lekko natłuszczonej stali o szkło.

Uzasadnij metodę postępowania, opisz wykonane doświadczenie. Przedyskutuj przebieg zjawiska, oszacuj niepewność pomiarową wyniku.

Uwagi:

1. Gładki papier wraz z kalką połóż na podłodze tak, by kulka spadająca z równi zostawiła na papierze ślad w miejscu upadku.
2. Zwróć uwagę, że ruch kulki puszczonej swobodnie z równi dla pewnych kątów odbywa się z poślizgiem, a dla pewnych bez poślizgu.

¹Porównaj zadania o podobnej tematyce z olimpiad: XX OF, st. II – zad. T1: *Ruch kulki na równi bez poślizgu*; XXI OF, st. I – zad. T3: *Prędkość kulki staczającej się z równi pochyłej*; VI MOF, – zad. T1: *Ruch walców staczających się z równi*; XXIV OF, st. II – zad. D2 (dodatkowe): *Wyznaczanie współczynnika tarcia posuwistego rurki o równie*; XXVII OF, st. I – zad. T1: *Ruch kulki na równi z uwzględnieniem tarcia potoczystego i posuwistego*;

Rozwiązanie zadania D – XXII OF, II stopień, część doświadczalna

Część teoretyczna

Zbadajmy teoretycznie ruch kulki na równi (skorzystamy z rozwiązania zadania T3 zawodów I stopnia XXI OF). W tym celu wprowadźmy oznaczenia (rys. 1):

\vec{T} – siła tarcia (statycznego lub poślizgowego) między kulką a równią,

\vec{N} – siła nacisku między równią a kulką,

\vec{v} – prędkość liniowa środka kulki,

\vec{a} – przyspieszenie środka kulki,

ω – prędkość kątowna kulki,

ε – przyspieszenie kątowe ruchu obrotowego kulki,

I – moment bezwładności kulki względem osi przechodzącej przez jej środek,

m – masa kulki,

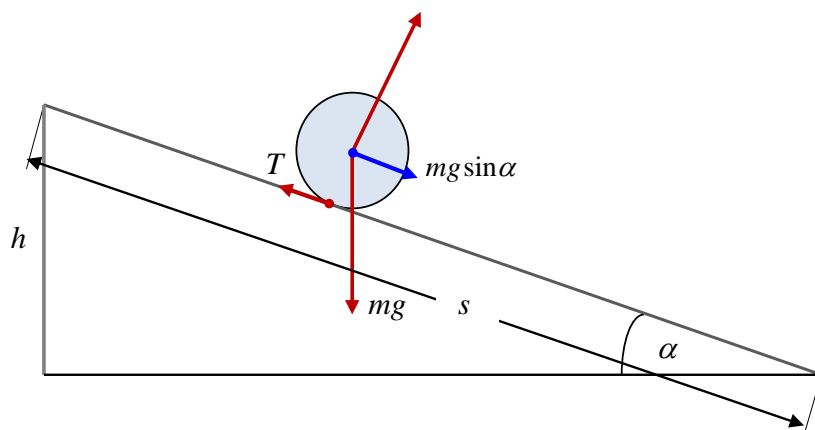
R – promień kulki.

Należy uświadomić sobie, że w zależności od wartości kąta α , mogą wystąpić dwa zasadniczo różne przypadki – ruch z poślizgiem i ruch bez poślizgu. Postarajmy się zrozumieć najpierw poglądowo, dlaczego tak musi być. Zacznijmy od równi nachylonej pod bardzo małym kątem. Gdyby nie było tarcia, to składowa siła ciężkości równoległa do równi nadałaby kulce przyspieszenie $g \sin \alpha$. Kulka poruszałaby się ruchem postępowym, nie obracając się. Innymi słowy, natychmiast po zwolnieniu kulki pojawiłaby się wolno rosnąca prędkość poślizgu. Jeśli jednak tarcie występuje, to sytuacja taka jest niemożliwa, gdyż natychmiast po rozpoczęciu ruchu pojawiłaby się duża siła tarcia $mgf \cos \alpha$ (przy dostatecznie małym kącie α) większa od siły $mg \sin \alpha$ (przy dostatecznie małym kącie α) i przeciwnie do niej zwrócona. Wypadkowa siła tarcia i siły $mg \sin \alpha$ byłaby zwrócona przeciwnie do przyspieszenia, co jest jawnie sprzeczne z II zasadą dynamiki Newtona. Dla dostatecznie małych kątów α , w ruchu bez prędkości początkowej, nie może więc występować poślizg, lecz jedynie toczenie, w czasie którego chwilowa prędkość punktu styczności kulki względem równi wynosi zero. Jeśli nie ma poślizgu, to tarcie jest tarcie statycznym, a jak wiemy siła tarcia statycznego nie jest określona jednoznacznie przez siłę nacisku i współczynnik tarcia – ich iloczyn wyznacza tylko maksymalną możliwą siłę tarcia. Czy można określić ruch, skoro działa na ciało siła o nieustalonej wartości? Można, jeśli posiadamy dodatkowe wiadomości o ruchu. W naszym przypadku będzie to warunek kinematyczny mówiący, że gdy $T < fN$, wtedy prędkość poślizgu równa $v - \omega R = 0$. Warunek toczenia bez poślizgu nie tylko pozwoli wyznaczyć ruch, ale i siłę tarcia potrzebną do tego, by ruch rzeczywiście spełniał ten warunek.

Wyobraźmy sobie teraz, że powtarzamy puszczanie kulki po równi zwiększając stale kąt nachylenia. Przekonamy się, że ze wzrostem kąta nachylenia będzie też rosła wartość siły tarcia statycznego T niezbędna do zapewnienia staczania bez poślizgu. Dla pewnego kąta osiągniemy

XXVII OF, st. III – zad. T2: *Opis ruchu kulki z uwzględnieniem tarcia posuwistego i potoczystego*; XXX OF, st. I – zad. T4: *Analiza ruchu z równi kulki z tarcie tocznym*; XXXI OF; st. wstępny – zad. D1: *Wyznaczanie współczynnika statycznego tarcia potoczystego stali o szkło*; LXV OF, st. II – zad. D: *Wyznaczanie współczynnika tarcia tocznego kulki stalowej o gumę oraz momentu bezwładności kulki*.

taką wartość siły T , która równa jest fN . Przy dalszym zwiększaniu kąta α siła tarcia statycznego T nie może już rosnać, gdyż osiągnęła swą wartość maksymalną. Musi wystąpić poślizg i nie będziemy mogli korzystać z równania $v = \omega R$, a jedynie z nierówności $v - \omega R > 0$ wyznaczającej kierunek siły tarcia „pod górę”, a więc hamującej ruch. Znowu powstaje problem, bo gubimy jedno równanie. Ale natychmiast zyskujemy drugie! Skoro kulka toczy się z poślizgiem, to siła tarcia kinetycznego jest wyznaczona przez nacisk: $T = fN$, a więc znów będziemy mieli ilość równań wystarczającą do wyznaczenia ruchu. Po tej wyczerpującej analizie możemy przystąpić do obliczeń.



Rys. 1. Zaznaczono siły działające na kulkę znajdującą się na równi pochyłej. Dwie siły przyłożone w środku kulki: ciężar kulki o wartości mg i siłę sprężystości równi prostopadłą do niej, skierowaną ku górze o wartości $mg \cos \alpha$ (tj. siłę reakcji na siłę nacisku kulki na podłoże o wartości $N = mg \cos \alpha$, nie zaznaczonej na rys.). Wypadkowa tych dwóch sił jest siłą zsuwającą równoległą do równi skierowaną w dół równi o wartości $mg \sin \alpha$. Trzecią siłą działającą na kulkę jest siła tarcia posuwistego \vec{T} przyłożona w punkcie styczności kulki z podłożem równi i skierowana wzdłuż równi ku górze

1. Toczenie bez poślizgu

Prawo dynamiki dla ruchu postępowego:

$$ma = mg \sin \alpha - T. \quad (1)$$

Prawo dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$I\varepsilon = TR. \quad (2)$$

Brak poślizgu:

$$v = \omega R \quad \Rightarrow \quad a = \varepsilon R \quad (3)$$

Nierówność tarcia statycznego:

$$T \leq fmg \cos \alpha. \quad (4)$$

Z równań (1), (2) i (3) możemy wyznaczyć trzy wielkości: s , T i ε . W tym celu z równań (2) i (3) znajdujemy najpierw związek

$$\frac{Ia}{R^2} = T, \quad (5)$$

który wstawiamy do (1), otrzymując

$$ma = mg \sin \alpha - \frac{Ia}{R^2}. \quad (6)$$

Stąd

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{I}{R^2}} = \frac{1}{1 + \frac{I}{mR^2}} g \sin \alpha, \quad (7)$$

a po wstawieniu rozwiązania do (5) mamy:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{I}{mR^2}} mg \sin \alpha. \quad (8)$$

Przekonujemy się, że istotnie T rośnie wraz z kątem α . Tarcie maksymalne zostaje osiągnięte dla kąta α_0 spełniającego równanie:

$$T_{\max} = \frac{1}{1 + \frac{I}{mR^2}} = fmg \cos \alpha_0. \quad (9)$$

Stąd

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = f \left(1 + \frac{mR^2}{I} \right). \quad (10)$$

Rozwiązanie dane wzorem (7) obowiązuje więc dla kątów α spełniających warunek

$$\alpha \leq \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[f \left(1 + \frac{mR^2}{I} \right) \right]. \quad (11)$$

Dla tych wartości kątów możemy bez kłopotu obliczyć w elementarny sposób końcową prędkość kulki. Ponieważ długość równi wynosi $h/\sin \alpha$, a przyspieszenie dane jest wzorem (7). Ze wzoru

$$\frac{v^2}{2} = sa,$$

słusznego ogólnie w ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej, dostajemy:

$$v^2 = 2 \frac{h}{\sin \alpha} \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I}{mR^2}} = \frac{2gh}{1 + \frac{I}{mR^2}} \quad \text{dla } \alpha \leq \alpha_0. \quad (12)$$

Zauważmy, że w przypadku toczenia bez poślizgu prędkość punktu, do którego przyłożona jest siła tarcia, wynosi zero – siła tarcia nie wykonuje zatem pracy i do wyznaczenia prędkości końcowej moglibyśmy skorzystać z zasady zachowania energii mechanicznej. Uwzględnienie energii ruchu obrotowego prowadzi właśnie do charakterystycznego czynnika $(1 + I/mR^2)$ we wzorze (12), który poza tym jest podobny do wzoru dla spadku swobodnego $v^2 = 2gh$.

Warto tutaj dodatkowo podkreślić, że do staczania się bez poślizgu konieczne jest występowanie siły tarcia. Spotykany czasami zwrot „kulka stacza się bez tarcia i bez poślizgu”, jest oczywistym błędem świadczącym o niezrozumieniu procesu staczania się. Podczas staczania się

bez poślizgu siła tarcia statycznego nie wykonuje pracy.

2. Toczenie z poślizgiem

Równania (1) i (2) nie ulegają oczywiście zmianie. Zamiast równania (3) i nierówności (4) mamy w tym przypadku:

$$v = \omega R > 0 \quad (13)$$

$$T = fmg \cos \alpha. \quad (14)$$

Podstawiając teraz znaną siłę T ze wzoru (13) do równań (1) i (2) dostajemy natychmiast:

$$a = g \sin \alpha - fg \cos \alpha \quad (15)$$

$$\varepsilon = \frac{fmgR \cos \alpha}{I}, \quad (16)$$

a więc zarówno ruch postępowy, jak i obrotowy są, jak w przypadku toczenia bez poślizgu, jednostajnie przyspieszone. Możemy wyznaczyć prędkości – liniową i kątową – dla dowolnego czasu t :

$$v = t(g \sin \alpha - fg \cos \alpha) \quad (17)$$

$$\omega = t \frac{fmgR \cos \alpha}{I} \quad (18)$$

Wstawiając znalezione rozwiązania do nierówności (13) dostajemy (po skróceniu przez t i g):

$$\sin \alpha - f \cos \alpha > \frac{fmgR \cos \alpha}{I} R \quad (19)$$

lub po uproszczeniu

$$\operatorname{tg} \alpha > f \left(1 + \frac{mR^2}{I} \right). \quad (20)$$

Oczekiwaliśmy na podstawie dyskusji jakościowej, że warunek na toczenie z poślizgiem będzie przeciwny do warunku na toczenie bez poślizgu, ale nie zaszkodziło się o tym przekonać. Obliczenie prędkości końcowej nie nastęrczy także teraz żadnych kłopotów, skoro znamy przyspieszenie i przebytą odległość:

$$v^2 = \frac{2gh}{\sin \alpha} (\sin \alpha - f \cos \alpha) = 2gh(1 - f \operatorname{ctg} \alpha) \quad \text{dla } \alpha > \alpha_0. \quad (21)$$

Ze wzorów (11), (12), (20) oraz (21), po podstawieniu $I = (2/5)mR^2$, otrzymujemy:

$$v_k = \sqrt{\frac{10}{7}gh} \quad \text{dla } \alpha < \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{7}{2}f, \quad (22)$$

$$v_k = \sqrt{2gh(1 - f \operatorname{ctg} \alpha)} \quad \text{dla } \alpha > \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{7}{2}f. \quad (23)$$

Jak widać z powyższych wzorów, końcowa prędkość kulki u podstawy równi zależy od f jedynie dla kątów nachylenia α wystarczająco dużych, mianowicie dla takich, dla których występuje poślizg. Musimy więc nie tylko wykonać pomiar prędkości końcowej v_k kulki, ale również znaleźć sposób na upewnienie się, że ruch istotnie był z poślizgiem. Upewnić się o tym możemy jedynie

badając ruch kulki przy różnych nachyleniach równi. Wzory (22) i (23) można przekształcić w następujących postaciach:

$$\left(1 - \frac{v_k^2}{2gh}\right) \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{7} \operatorname{tg} \alpha \quad \text{dla } \alpha < \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{7}{2}f, \quad (24)$$

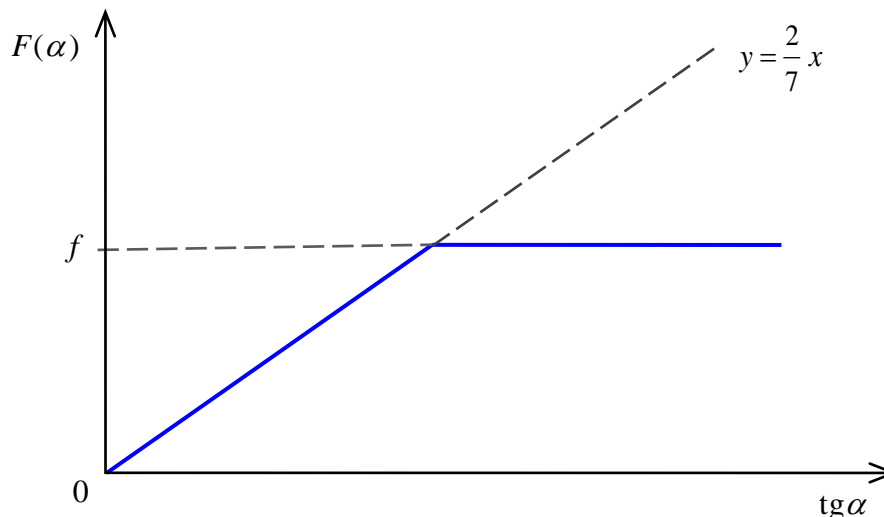
$$\left(1 - \frac{v_k^2}{2gh}\right) \operatorname{tg} \alpha = f \quad \text{dla } \alpha < \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{7}{2}f. \quad (25)$$

Sporządzając wykres funkcji

$$F(\alpha) = \left(1 - \frac{v_k^2}{2gh}\right) \operatorname{tg} \alpha \quad (26)$$

w zależności od tangensa kąta α powinniśmy dostać przebieg taki jak na rysunku 2.

Mając taki wykres odczytujemy bezpośrednio wartość f , jako rzędną poziomego odcinka wykresu. Część wykresu dla $\alpha < \operatorname{arc} \operatorname{tg}[(7/2)f]$ nie ma wpływu na wyznaczenie wartości współczynnika tarcia. Wystąpienie załamania wykresu upewni nas jedynie, że mierząc wartości funkcji $F(\alpha)$ na prawo od załamania mierzymy istotnie to, co powinniśmy.



Rys. 2

Część doświadczalna

Rysunek 2 przedstawia, jak należy ustawić przyrządy, by móc zmierzyć wielkość $F(\alpha)$.

Wielkościami, które mierzymy bezpośrednio, są h , s , H oraz d , należy więc wyrazić $F(\alpha)$ przez te wielkości.

Dla danego rzutu ukośnego mamy:

$$d = v_k t \cos \alpha \quad (27)$$

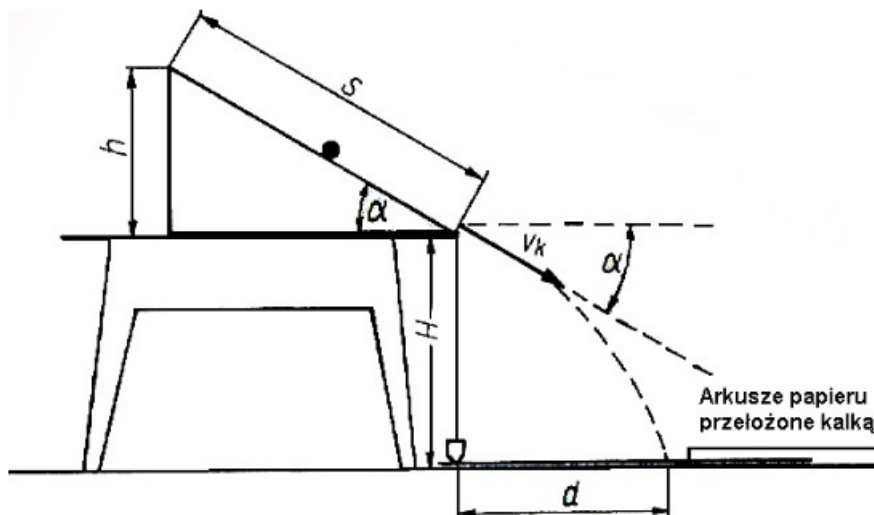
$$H = v_k t \sin \alpha + \frac{1}{2} g t^2 \quad (28)$$

co po eliminacji czasu spadania t daje związek:

$$H = d \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2} g \frac{d^2}{v_k^2 \cos^2 \alpha} \quad (29)$$

z którego wyznaczmy $v_k^2/2g$

$$\frac{v_k^2}{2g} = \frac{d^2}{4(H - d \operatorname{tg} \alpha) \cos^2 \alpha} \quad (30)$$



Rys. 3. (rys. na podstawie: A. Szymacha: *Olimpiady Fizyczne XXI i XXII. WSiP, Warszawa 1975*).

Korzystając z oczywistego związku $h = s \cdot \sin \alpha$ pozostawiając (9) do (5) dostajemy:

$$F(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha - \frac{d^2}{4s(H \cos \alpha - d \sin \alpha) \cos^2 \alpha}, \quad (31)$$

gdzie $\sin \alpha = h/s$.

Dla obliczeń przydatna jest następująca postać:

$$F(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha - \frac{d/s}{4(H/d - \operatorname{tg} \alpha) \cos^3 \alpha} \quad (32)$$

Same pomiary powinny wyglądać następująco:

1. Mierzmy s i H , które są ustalone dla całego doświadczenia.
2. Na podłodze kładziemy co najmniej dwa arkusze papieru przełożone kalką maszynową.
3. Zaznaczamy na papierze (przez dociśnięcie) punkt, do którego dotyka ciężarek pionu.
4. Ustalamy nachylenie równi i mierzymy dokładnie wysokość h .
5. Puszczamy z wierzchołka równi lekko natłuszczoną kulkę. Kulka uderzając w papier odcisnie ślad w miejscu uderzenia.
6. Nie zmieniając żadnych parametrów, puszczamy kulkę kilka lub kilkanaście razy.
7. Zwiększamy nachylenie równi i znów dokładnie mierzymy h .
8. Ponownie puszczamy kulkę i sprawdzamy, czy ślad jest dostatecznie oddalony od poprzednich, tak byśmy nie mieli wątpliwości, któremu kolejnemu pomiarowi odpowiadają ślady na papierze (dla większej pewności możemy ewentualnie przesunąć papier równolegle w bok).
9. Wykonujemy jednakową liczbę doświadczeń dla każdej wysokości h , zmieniając od czasu do czasu arkusze papieru, i zaznaczamy przy każdej grupie śladów, jej wysokości h one odpowiadają.
10. Przystępujemy do opracowania wyników.

Ślady kul na papierze odpowiadające spuszczeniu kuli z ustalonej wysokości h wykazują pewien rozrzut. Rysujemy na papierze prostą dzielącą dany zbiór punktów na dwie liczebnie równe grupy i mierzymy odległość tej prostej od punktu wyznaczonego przez pion – odpowiada to obliczeniu średniej wartości d . Uzyskane wartości wykorzystujemy do sporządzenia tabeli wyników.

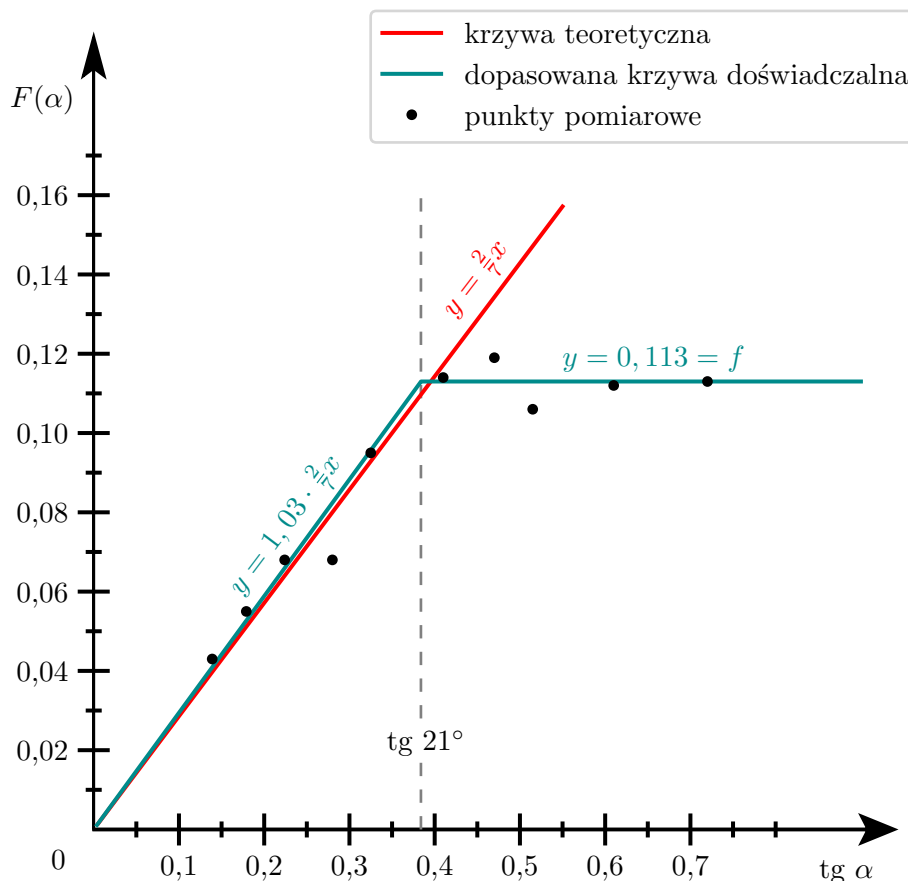
Jako przykład, przytaczamy wyniki otrzymane na typowym zestawie, jaki mieli do dyspozycji uczniowie, dla

$$s = 87,0 \text{ cm} \quad H = 78,0 \text{ cm}.$$

Tabela 1. Wyniki pomiarów i wyniki obliczeń dla doświadczenia

Nr	h , cm	d , cm	$\sin \alpha$	α	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	F , N
1	12,0	48,0	0,138	7°55'	0,990	0,139	0,043
2	15,5	53,2	0,177	10°10'	0,982	0,179	0,055
3	19,0	57,1	0,217	12°36'	0,974	0,224	0,068
4	23,5	61,4	0,270	15°40'	0,963	0,28	0,081
5	27,0	63,1	0,312	18°05'	0,945	0,325	0,095
6	33,0	64,9	0,380	22°20'	0,920	0,410	0,114
7	37,5	65,3	0,430	25°20'	0,905	0,470	0,119
8	40,0	65,9	0,460	27°20'	0,888	0,515	0,106
9	45,5	64,6	0,520	31°30'	0,852	0,610	0,112
10	51,0	61,5	0,585	35°50'	0,810	0,720	0,113

Odczytując z odpowiednich kolumn wartości $\operatorname{tg} \alpha$ i F , sporządzamy wykres funkcji F , w zależności od $\operatorname{tg} \alpha$. Wykres ten przedstawia rysunek 4.

Rys. 4. $F(\alpha)$ opisane jest równaniem (32)

Widać wyraźnie, że pierwsze 5 punktów układu się bardzo blisko krzywej teoretycznej odpowiadającej staczaniu bez poślizgu. Dokładniej, dla tej części wykresu $y = 1,03 \cdot \frac{2}{7}x$. Niepewność pomiarowa współczynnika kierunkowego w stosunku do wartości teoretycznej $\frac{2}{7}$ wynosi zaledwie 3 %. Przekonuje nas to o niewielkim wpływie oporów powietrza i o stosunkowo dużej dokładności pomiaru. Dlatego też rozsądne będzie przyjąć dla względnej niepewności pomiarowej współczynnika tarcia również 3 %. Ostatecznie współczynnik tarcia natłuszczonej stali o szkło zmierzony w tym doświadczeniu, wynosi:

$$f = 0,113 \pm 0,003, \quad (33)$$

a kąt graniczny, powyżej którego występuje poślizg,

$$\alpha_{gr} = 21^\circ. \quad (34)$$

Na zakończenie zwróćmy uwagę, że dobra zgodność otrzymanych wyników z modelem teoretycznym opartym na założeniu, że występuje tylko jeden współczynnik tarcia, wskazuje, iż różnica między statycznym a kinetycznym współczynnikiem tarcia natłuszczonej stali o szkło jest niezauważalnie mała.