



XXII OLIMPIADA FIZYCZNA

(1972/1973)

ZAWODY III STOPNIA

CZEŚĆ DOŚWIADCZALNA

Zadanie doświadczalne – D

Nazwa – Pomiar przewodnictwa metodą 4 sond.

Źródła – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej

– Andrzej Szymacha: Olimpiady fizyczne XXI – XXII. WSiP, Warszawa 1975, str. 152 – 160.

Masz do dyspozycji:

- cztery elektrody z odizolowanymi końcami do umocowania na pręcie,
- źródło prądu stałego, miernik uniwersalny,
- galwanometr lub amperomierz z zerem w środku skali,
- opornicę suwakową, opornicę dekadową,
- stały opór o podanej wartości, baterijkę 4,5 V, przewody,
- duże naczynie zawierające 1 l wody,
- roztwór CuSO_4 o stężeniu 23 g CuSO_4 na 100 ml roztworu,
- menzurkę, linijkę, papier milimetrowy.

Wyznacz opór właściwy roztworu w zależności od stężenia, w granicach stężeń od 0,1 do 1,0 g CuSO_4 na 100 ml roztworu.

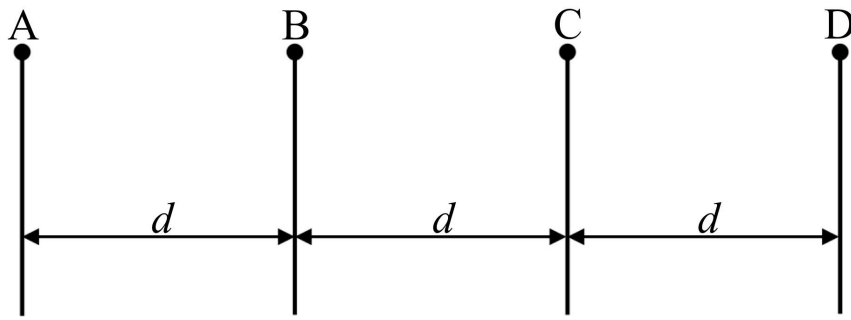
Uwagi:

1. Przyjmujemy, że naczynie z roztworem można uważać za nieskończony ośrodek przewodzący. Ponadto przyjmujemy, że miary odizolowanych części elektrod są dostatecznie małe i można je zaniedbać. Pomiarów najłatwiej wykonać, gdy zakończenia elektrod znajdują się na linii prostej w stałych odległościach od siebie (rys. 1)

2. W przypadku czterech elektrod punktowych znajdujących się w nieskończonym ośrodku przewodzącym, w stałych odległościach d jedna od drugiej (wzdłuż linii prostej), napięcie między sąsiednimi elektrodami wewnętrznymi (gdy nie płynie przez nie prąd) wynosi

$$U_{BC} = \frac{\rho I}{4\pi d},$$

gdzie ρ oznacza opór właściwy ośrodka, a I natężenie prądu płynącego przez elektrody zewnętrzne (A , D).



Rys. 1. Schemat sugerowanego rozmieszczenia zakończeń elektrod w celu wykonania doświadczenia.

Wyprowadzenie tego wzoru powinno być głównym elementem teoretycznej części rozwiązania zadania. Można jednak skorzystać z tego wzoru bez wyprowadzania go, ale w tym wypadku ocena części teoretycznej nie będzie mogła być maksymalna.

Rozwiązanie zadania D – XLIV OF, III stopień, część doświadczalna

Część teoretyczna

Zacznijmy, jak zwykle, od rozwiązania części teoretycznej zadania. Z poczynionych przy wyprowadzeniu podanego wzoru założeń będziemy mogli wyciągnąć ważne wnioski determinujące taki sposób wykonania pomiarów, który pozwalałby na osiągnięcie największej dokładności. W celu wyprowadzenia podanego w treści zadania wzoru, będącego podstawą metody pomiaru oporu właściwego roztworu, rozważmy najpierw rozkład potencjału elektrycznego w przypadku zanurzonej w ośrodku przewodzącym pojedynczej elektrody, przez którą wpływa prąd I . Wyobraźmy sobie, że prąd ten rozplywa się symetrycznie we wszystkich kierunkach i dopływa w końcu do bardzo odległych ścianek naczynia, które są uziemione. Natężenie prądu płynącego przez każdą kulistą warstwę o promieniu r i grubości Δr jest oczywiście równe I niezależnie od wartości r . Ponieważ ośrodek charakteryzuje się oporem ρ właściwym więc każda taka cienka warstwa kulista stanowi dla prądu płynącego równoległe do promienia pewien opór, który znajdujemy z prawa Ohma:

$$\text{opór warstwy} = \frac{\rho \Delta r}{S} = \frac{\rho \Delta r}{4\pi r^2}. \quad (1)$$

Ścisłe rzecz biorąc „pole przekroju” tego, dziwnego nieco, przewodnika nie jest wielkością jednoznacznie określoną, bo warstwa ma promienie, wewnętrzny i zewnętrzny, różniące się nieco, ale w granicy $\Delta r \rightarrow 0$ różnica ta jest nieistotna.

Skoro jest opór i jest prąd I płynący przez „przewodnik”, to występuje różnica potencjałów oraz pole elektryczne. Owa różnica potencjałów, zgodnie z innym prawem Ohma, wynosi:

$$\Delta V = I \frac{\rho \Delta r}{4\pi r^2}. \quad (2)$$

Jeśli na drodze Δr potencjał spada o ΔV , to natężenie pola elektrycznego w naszej warstwie (czyli dokładniej w odległości r) wynosi:

$$E(r) = \frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{\rho I}{4\pi r^2}. \quad (3)$$

Dokładnie taki sam wzór (z innymi jednak literami) określa pole elektryczne ładunku punktowego w próżni! Również kierunki pola elektrycznego w próżni i pola elektrycznego w ośrodku, w którym płynie prąd, są takie same. Problem wyznaczenia potencjału pola, jeśli znamy jego natężenie, jest problemem czysto matematycznym, niezależnym od tego, jaki jest sens fizyczny stałych współczynników występujących we wzorze 4. Wszak dobrze wiemy, jaki jest potencjał (unormowany tak, by był równy zeru w nieskończoności) pojedynczego ładunku punktowego.

$$\text{Pole ładunku punktowego } E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (4)$$

$$\text{Potencjał ładunku punktowego } V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Dlatego możemy od razu napisać, jaki jest rozkład potencjału w przypadku pojedynczej elektrody (zamiast Q kładziemy I , zamiast ϵ_0 podstawiamy $1/\rho$)

$$V(r) = \frac{\rho I}{4\pi r}. \quad (5)$$

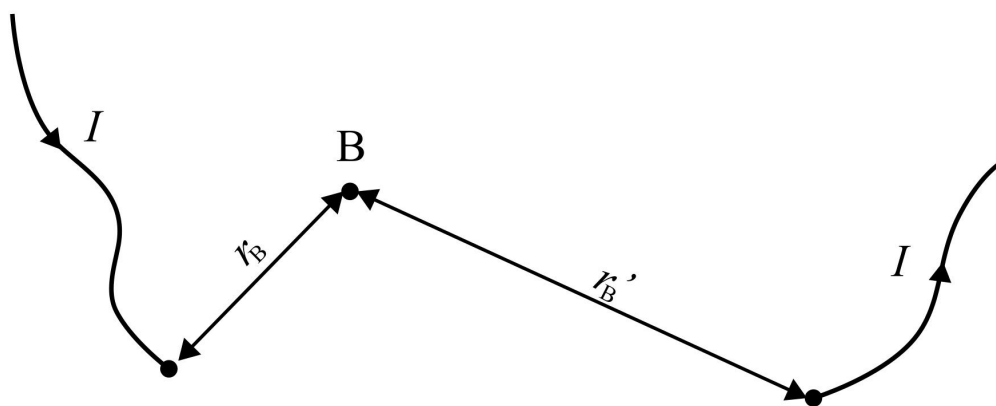
Wyobraźmy teraz sobie, że zabraliśmy naszą elektrodę, a ustawiliśmy w innym miejscu drugą, podobną, przez którą prąd płynie w kierunku przeciwnym. Oznaczmy odległość danego punktu

w przestrzeni od nowej elektrody literą r' . Mamy oczywiście:

$$V(r') = -\frac{\rho I}{4\pi r'} \quad (6)$$

Skorzystać teraz możemy z pewnego ogólnego prawa, bardzo prostego, ale o doniosłych konsekwencjach (porównaj z zadaniem o oporach z zawodów II stopnia tej olimpiady). Otóż jeśli w danym układzie elektrycznym mamy dwie możliwe sytuacje – jedną scharakteryzowaną pewnym rozkładem prądu, potencjału i natężenia pola elektrycznego, drugą scharakteryzowaną innymi wartościami tych wielkości – to sytuacja, w której odpowiednie wielkości są sumami (zwyczajnymi dla skalarów, wektorowymi dla wektorów) tych wartości, jest znów zgodna z prawami elektryczności. Nazywa się to prawo *zasadą superpozycji*. Oznacza ona w naszym przypadku, że jeśli w roztworze umieścimy dwie elektrody jednocześnie, przy czym przez jedną będzie wpływał prąd I , a drugą wypływał prąd o tym samym natężeniu, to w punkcie B odległym o r od pierwszej elektrody i o r' od drugiej elektrody, wartość potencjału będzie dana sumą wzorów (6) i (7) (patrz rysunek 2).

$$V(B) = \frac{\rho I}{4\pi} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r'_B} \right) \quad (7)$$



Rys. 2. Schemat układu z przedstawionym punktem B odległym o r od pierwszej elektrody i o r' od drugiej elektrody, w którym mierzony jest potencjał pomiędzy tymi elektrodami.

Dodatkowe znaczki B przy wielkościach r i r' mają przypominać, że są to odległości pewnego punktu B od elektrod – pierwsza r_B , jest odległością punktu B od elektrody, którą prąd wpływa, druga r'_B – odległością od elektrody, którą prąd wypływa. Jak widać z wyprowadzenia, wzór (8) jest całkowicie ogólny – nie musieliśmy nigdzie zakładać, że punkt B i elektrody leżą na jednej linii prostej.

Zauważmy, że przy wyprowadzeniu wzorów (6) i (7) musieliśmy zakładać, iż gdzieś bardzo daleko znajduje się metalowa uziemiona powierzchnia, którą prądy mogą odpływać i dopływać. W sytuacji kiedy mamy dwie elektrody, prąd przez tę granicę naczynia wcale nie płynie [jest równy sumie $I + (-I)$] – możemy więc teraz uziemioną powierzchnię usunąć i nic przez to się nie zmieni. Natężenie pola elektrycznego ma taki przebieg, jak natężenie pola elektrycznego w próżni pochodzącego od dwóch równych, lecz różnoimiennych ładunków punktowych umieszczonych w pewnej od siebie odległości. Natężenie to bardzo szybko maleje przy oddalaniu się od ładunków, znacznie szybciej niż natężenie pola elektrycznego pochodzącego od jednego tylko źródła. Jest to

zrozumiałe. Przecież obserwując dwa ładunki z dużej, w porównaniu z odstępem między nimi, odległości wydaje nam się, że to prawie jeden punkt, ale o łącznym ładunku równym zeru.

Jednakże, jeśli natężenie pola elektrycznego w pewnej odległości od elektrod jest praktycznie równe zeru i nie płyną tamtędy prądy o zauważalnym natężeniu, to nic się nie zmieni, jeżeli z tych obszarów usuniemy w ogóle ośrodek przewodzący. A zatem nasz wyidealizowany opis teoretyczny, dotyczący prawie nieskończonego ośrodka z ogromnymi uziemionymi metalowymi kulami na brzegu, stosować można przy dwóch elektrodach jako dobre przybliżenie również w przypadku zwykłej, niezbyt przecież dużej, zlewki ograniczającej szklanymi ściankami badany elektrolit! Musimy jednak pamiętać o tym, by w czasie wykonywania pomiarów odległość między elektrodami była dużo mniejsza od rozmiarów naczynia – niezbyt jednak mała, gdyż wtedy jej pomiar byłby bardzo niedokładny i wprowadziłby większy błąd niż założenie o nieskończonym ośrodku. Jest to nasz pierwszy wniosek.

Zastanówmy się teraz nad sprawą punktowości elektrod. Otóż elektrody nie są naprawdę punktowe – możemy sobie dla dokonania oszacowań wyobrazić, że są one zakończone małymi kuleczkami o promieniu a . Obliczmy w tym wypadku różnicę potencjałów między elektrodami A i D , potrzebną do tego, by płynął między nimi prąd I . Obierzmy punkt B , który we wzorze (8) jest dowolny, raz na powierzchni elektrody A , raz na powierzchni elektrody D , obliczmy potencjał w tych dwóch punktach, a następnie różnicę między nimi. Dla punktu B leżącego na powierzchni elektrody A odległość $r_B = a$, a odległość r'_B równa jest odległości między elektrodami. Do wzoru na potencjał $V(B)$ wchodzą odwrotności tych odległości, a ponieważ a jest dużo mniejsze od odległości między elektrodami, to możemy z doskonałą dokładnością przyjąć, że potencjał elektrody A wynosi:

$$V(A) \approx \frac{\rho I}{4\pi a}.$$

Analogicznie potencjał elektrody D wynosi:

$$V(D) \approx -\frac{\rho I}{4\pi a}.$$

Różnica między nimi:

$$V(A) - V(D) \approx \frac{\rho I}{2\pi a}, \quad (8)$$

co można interpretować również tak, że wypadkowy opór między A i D wynosi:

$$R_{AD} = \frac{\rho}{2\pi a}. \quad (9)$$

Jeśli rozmiary elektrod są bardzo małe, to różnica potencjałów potrzebna do „przepchnięcia” prądu między nimi jest bardzo wielka. Jest to intuicyjnie dość zrozumiałe. Oznacza to innymi słowy, że opór zastępczy nieskończonego ośrodka, z wstawionymi weń dwiema kulistymi elektrodami o promieniu a każda, nie zależy praktycznie od odległości między elektrodami, ale zależy bardzo silnie od promienia kuleczek i dąży do nieskończoności, gdy $a \rightarrow 0$. Mogłoby się wydawać, że wzór (9) byłby najprostszą metodą pomiaru oporu właściwego ρ , gdyż sprowadzałby się tylko do pomiaru oporu (np. bezpośrednio omomierzem lub pośrednio, poprzez pomiar napięcia i natężenia prądu). No tak, ale jak zmierzyć a ? Co to w ogóle jest a , jeśli zakończenia elektrod nie są hipotetycznymi kuleczkami, lecz po prostu kawałkami miedzianego drutu obciętych krzywo i wysuniętych o 1 mm z igelitowej izolacji? Widać, że metoda ta nie ma najmniejszych szans powodzenia, dlatego że polega ona faktycznie na pomiarze różnicy potencjałów bezpośrednio na elektrodach, a więc tam, gdzie rozkład potencjału jest mocno zdeformowany samym kształtem elektrod.

Powróćmy znów do analogii z ładunkiem. Jeśli pewien ładunek będzie rozłożony na nieregularnym okruchu przewodnika, to jasne jest, że w odległości dużo większej od rozmiarów okrucha

kształt jego nie będzie miał praktycznego wpływu na natężenie pola (ani na wartość potencjału). Mały okruch – to po prostu okruch punktowy, a wtedy jego kształt nie ma znaczenia. Jednak w bezpośrednim sąsiedztwie, naładowanego nieforemnego ciała potencjał jest nie tylko bardzo duży, ale i zależny od szczegółów jego kształtu. Dlatego musimy w naszym zadaniu mierzyć potencjały w odległościach stosunkowo dużych w porównaniu z rozmiarami elektrod. I to jest nasz wniosek numer 2. Po to właśnie mamy do dyspozycji cztery elektrody. Jeśli jedną z nich umieścimy w punkcie B , to jej potencjał będzie dany wzorem (7) – jeśli inną elektrodę umieścimy w punkcie C , to jej potencjał będzie dany analogicznym wzorem z literą C zamiast litery B . Różnica potencjałów między sondami $V(B) - V(C)$ wyniesie

$$V(B) - V(C) = U_{BC} = \frac{\rho I}{4\pi} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r'_B} - \frac{1}{r_C} + \frac{1}{r'_C} \right]. \quad (10)$$

Jeśli ustawimy wszystkie elektrody na jednej prostej, w równych od siebie odległościach, tak jak to sugeruje treść zadania, to wtedy:

$$r_B = d, \quad r'_B = 2d, \quad r_C = 2d, \quad r'_C = d$$

i wzór (10) przyjmuje dokładnie postać taką, jaka jest w treści zadania:

$$U_{BC} = \frac{\rho I}{4\pi} \left[\frac{1}{d} - \frac{1}{2d} - \frac{1}{2d} + \frac{1}{d} \right] = \frac{\rho I}{4\pi d}. \quad (11)$$

Część doświadczalna

Zastanówmy się teraz, jak praktycznie zmierzyć napięcie U_{BC} . Zwyczajne podłączenie sond B i C do woltomierza wywołałoby bardzo niemiłe skutki. Otóż wzór (12) został wyprowadzony przy założeniu, że przez sondy B i C nie płynie żaden prąd. Tymczasem podłączenie woltomierza o skończonym oporze wewnętrznym spowodowałoby niewątpliwie wystąpienie takiego prądu. Prąd płynący przez woltomierz oraz sondy spowodowałby zafałszowanie wyniku. Złożyłyby się na to dwa powody. Otóż opór elektrolitu między sondami B i C jest stosunkowo duży (pamiętamy, że dla elektrod punktowych opór ten byłby teoretycznie nieskończony). W konkretnych warunkach opór ten był niewiele mniejszy od oporu wewnętrznego miernika uniwersalnego zastosowanego jako miliwoltomierz. Kłopot ten jest, jeśli tak można powiedzieć, zwyczajnym kłopotem, jaki występuje zawsze przy mierzeniu spadku napięcia woltomierzem o oporze wewnętrznym, który nie jest wystarczająco duży. Jednak dla pomiarów z elektrolitami występuje jeszcze jeden kłopot i to znacznie poważniejszy. Wiąże się on z tym, że nawet stosunkowo niewielki prąd płynący przez sondy spowoduje tzw. *zjawisko polaryzacji elektrod* – wkrótce po rozpoczęciu pomiarów wydzielające się na sondach produkty elektrolizy zamienią te sondy jak gdyby w elektrody ogniwa galwanicznego. Powstanie dodatkowa różnica potencjałów, której nie uwzględnia wzór (11).

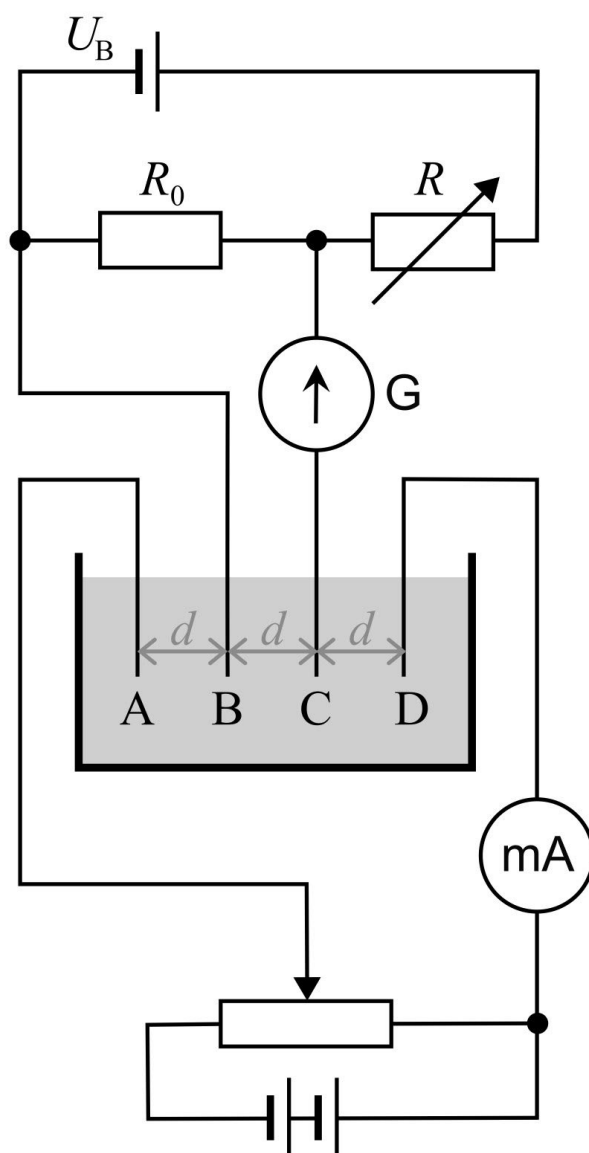
Jedynym wyjściem z powyższych trudności jest taki pomiar napięcia U_{BC} , przy którym przez sondy nie popłynie żaden prąd. Umożliwia to tzw. metoda kompensacyjna pomiaru napięcia, którą można zastosować, jeśli dysponujemy źródłem o znanej sile elektromotorycznej, dwoma oporami, z których jeden może być regulowany oraz czułym galwanometrem – niekoniecznie nawet wyskalowanym. Rys. 3 przedstawia układ doświadczalny, który należało zastosować.

Przez odpowiednie ustawienie opornicy dekadowej R można doprowadzić do zaniku prądu w galwanometrze, a więc do zaniku prądu płynącego przez sondy B i C . Z poprzedniej dyskusji wiemy, że właśnie w tej sytuacji napięcie na sondach B i C jest dane teoretycznym wzorem (12), jednocześnie brak prądu płynącego przez galwanometr świadczy o tym, że napięcie U_{BC} równe jest dokładnie (jest skompensowane – stąd nazwa metody) spadkowi napięcia na oporze R_0 , czyli

$$U_{BC} = U_B \frac{R_0}{R_0 + R}. \quad (12)$$

Znając U_B i R_0 i odczytując wskazanie R opornicy dekadowej, przy którym nastąpiła kompensacja, obliczamy ze wzoru (12) mierzone napięcie U_{BC} .

Po zbudowaniu właściwego układu samo wykonanie pomiarów nie nastęcało już większych kłopotów. Należało stopniowo zwiększać stężenie elektrolitu, dolewając do naczynia odpowiednio dobrane ilości roztworu CuSO_4 i odczytywać natężenie I oraz wartość R , przy którym przez galwanometr G nie płynął prąd.



Rys. 3. Schemat układu doświadczalnego

Uzyskane konkretne wyniki na wartości ρ nie były w tym zadaniu zbyt ważne. Można powiedzieć, że istotą zadania była sama metoda wyznaczenia ρ , w której trzeba korzystać zarówno z

niebanalnego wzoru teoretycznego, jak i z dowcipnej metody praktycznej pomiaru napięcia U_{BC} .

Warto wiedzieć, że metoda czterech sond z kompensacyjnym pomiarem napięcia jest powszechnie stosowana do wyznaczania przewodnictwa półprzewodników. W tym przypadku sondy przykładają się do powierzchni półprzewodnika, co powoduje, że we wzorze (12) pojawia się dodatkowy czynnik 2.

Punktacja

1. Wyznaczenie rozkładu potencjału dla pojedynczej elektrody 4 pkt.
2. Wyznaczenie napięcia między sąsiednimi elektrodami wewnętrznymi 6 pkt.
3. Zbudowanie układu pomiarowego 4 pkt.
4. Skalibrowanie układu poprzez poprawne ustawienie opornicy dekadowej 1 pkt.
5. Pomiar zależności napięcia i natężenia prądu od stężenia CuSO_4 3 pkt.
6. Wyznaczenie wartości oporności w zależności od stężenia CuSO_4 2 pkt.

Pozycje 1–2 w Punktacji dotyczą części teoretycznej rozwiązania zadania.