XXIII OLIMPIADA FIZYCZNA
(1973/1974)
ZAWODY I STOPNIA
CZĘŚĆ DOŚWIADCZALNA

Zadanie doświadczalne – D

Nazwa – Wyznaczenie nadwyżki ciśnienia w bańce mydlanej nad ciśnieniem powietrza ją otaczającego przy zaniku bańki mydlanej.

Źródła – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
– Waldemar Gorzkowski: *Fizyka w Szkole* nr 4, 1974
– W. Gorzkowski: *Olimpiady fizyczne XXIII i XXIV*. WSiP, Warszawa 1977
– Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki: *Olimpiada fizyczna. Wybrane zadania doświadczalne z rozwiązaniami.* Stowarzyszenie *Symetria i Własności Strukturalne*, Poznań 1994 (zad. 22).

Masz do dyspozycji:

- wodę oraz szampon lub mydło,
- cienką rurkę,
- źródło światła, np. latarkę.

Wyznacz zależność nadwyżki ciśnienia w bańce mydlanej Δp nad ciśnieniem powietrza otaczającego bańkę w zależności od promienia bańki r.

Korzystając z wyników pomiarów, wyznacz napięcie powierzchniowe wody z mydłem. (zamiast wody z mydłem możesz użyć szamponu do mycia włosów.)

Uzasadnij teoretycznie sposób postępowania. Oszacuj niepewność wyniku pomiaru. Omów czynniki wpływające na niepewności pomiarowe. Opisz sposób wykonania zadania, układ doświadczalny i wykonane czynności.

Uwagi:
1. Rozmiar bańki mydlanej można wyznaczyć posługując się katetometrem lub badając cień geometryczny bańki.
2. Nadwyżka ciśnienia Δp jest bardzo mała i tradycyjnymi metodami trudno byłoby ją zmierzyć. W celu wyznaczenia Δp możesz skorzystać z niżej podanego wzoru Poiseuille'a (czyt. Puaseja) którego nie trzeba w zadaniu uzasadniać. Wzór Poiseuille'a mówi, że objętość gazu przepływającego w ciągu 1 sekundy przez długą, cienką rurkę o przekroju kołowym, przy bardzo małej różnicy ciśnienia gazu p na obu końcach rurki wynosi:

$$V = \frac{\pi R^4}{8\eta l}\Delta p,$$

gdzie R – promień rurki , l – jej długość, η – lepkość gazu. Lepkość powietrza w temperaturze pokojowej wynosi $178 \cdot 10^{-6}$ g $\cdot$ cm^{-1} $\cdot$ s^{-1}.

Wzór Poiseuille'a odnosi się do długich cienkich rurek. Podczas kontrolnego wykonania zadania stosowano plastikową rurkę (do picia napojów) dla której $l/R \approx 150$. Rurek, dla których $l/R < 150$ raczej nie należy używać.

Rozwiązanie zadania D – XXIII OF, I stopień, część doświadczalna

Część teoretyczna

Praca W potrzebna do powiększenia promienia bańki o niewielką wartość $\mathrm{d}r$ wynosi

$$W = \Delta p S \, \mathrm{d}r \,,$$

gdzie S oznacza pole powierzchni bańki:

$$S = 4\pi r^2. \tag{1}$$

Powiększeniu promienia o $\mathrm{d}r$ towarzyszy zmiana powierzchni S o $\mathrm{d}S$:

$$\mathrm{d}S = 8\pi r \, \mathrm{d}r \,. \tag{2}$$

Korzystając z definicji napięcia powierzchniowego piszemy

$$W = 2\sigma \, \mathrm{d}S \,. \tag{3}$$

Dwójka w tym wzorze bierze się stąd, że błonka ma dwie strony, a więc w istocie mamy dwie powierzchnie.

Z porównania obu wzorów na pracę, po krótkich przekształceniach otrzymujemy

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{r}. \tag{4}$$

Jeżeli przez V oznaczymy objętość bańki, to zgodnie z wzorem Poiseuille'a szybkość zmian V związana z wypływem powietrza z bańki przez rurkę będzie następująca:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi R^2}{8\eta l} \Delta p. \tag{5}$$

Bańka ma kształt kuli. Zatem

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3. \tag{6}$$

Stąd

$$\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \, \mathrm{d}r \tag{7}$$

Wobec tego

$$4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi R^4}{8\eta l}\frac{4\sigma}{r}, \tag{8}$$

czyli:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = -\frac{8\eta l}{\sigma R^4} r^3. \tag{9}$$

Z otrzymanego równania różniczkowego możemy wyznaczyć zależność $t(r)$. Zazwyczaj posługujemy się funkcją $r(t)$, ale czasami – tak jak w naszym przypadku – łatwiej jest wyznaczyć funkcję odwrotną, tj. $t(r)$. Jak wiadomo funkcję pierwotną do funkcji $y = \alpha x^3$, gdzie α oznacz stałą jest $\alpha x^4/4 + C$, gdzie C oznacza pewną stałą. Zatem

$$t = \frac{2\eta l}{\sigma R^4} r^4 + C. \tag{10}$$

Przyjmując, że dla $t = 0$ promień bańki r ma wartość r_0 otrzymujemy:

$$C = \frac{2\eta l}{\sigma R^4} r_0^4. \tag{11}$$

Zatem

$$t = \frac{2\eta l}{\sigma R^4}(r_0^4 - r^4). \tag{12}$$

Jeżeli czas „zaniku” bańki, czyli czas, w ciągu którego promień bańki zmaleje od r_0 do zera oznaczymy przez T, otrzymamy

$$T = \frac{2\eta l r_0^4}{\sigma r^4}. \tag{13}$$

Stąd:

$$\sigma = \frac{2\eta l r_0^4}{T r^4} \tag{14}$$

i

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{r_0} = \frac{8\eta r_0^3}{T r^4}. \tag{15}$$

Część doświadczalna

Doświadczenie wykonujemy następująco. Na otwartej rurce zamocowanej pionowo na statywie zawieszamy bańkę mydlaną, w pobliżu bańki umieszczamy pionowy płaski arkusz kartonu, na którym będziemy obserwować cień bańki otrzymany przez oświetlenie jej umieszczonym z dala punktowym źródłem światła (np. żaróweczką). Przed przystąpieniem do pomiaru należy z bańki usunąć krople wody, która zwykle pojawia się w dolnej jej części, a także pozwolić bańce ostygnąć tak, by jej temperatura zrównała się z temperaturą otoczenia (powietrze z ust ma temperaturę wyższą). Następnie mierzymy (na cieniu) promień bańki r_0 w chwili T_0 i mierzymy czas T, po jakim bańka zniknie wskutek wypływu powietrza przez rurkę. Obliczamy $\Delta p(r_0)$. Pomiary wykonujemy kilkakrotnie dla różnych wartości r_0, po czym wykonujemy wykres Δp w zależności od $1/r_0$. Wykres ten powinien być linią prostą, której współczynnik nachylenia powinien być równy 4σ. Wyznaczając z wykresu ten współczynnik nachylenia będziemy mogli otrzymać wartość σ.

Wartości doświadczalne σ dla różnych substancji, z których można otrzymać bańki, są zgodne z wartościami σ otrzymanymi dla tych substancji innymi metodami.

Przy wykonywaniu ćwiczenia warto zwrócić uwagę na to, by rurka spełniała warunek $l/R > 150$. Dla rurek zbyt grubych wypływ gazu z bańki może być burzliwy, podczas gdy wzór Poiseuille'a można stosować tylko do wypływów laminarnych.

Opisana powyżej metoda jest jedną z wielu.