XXIII OLIMPIADA FIZYCZNA
(1973/1974)
ZAWODY WSTĘPNE

Zadanie doświadczalne – D

Nazwa – Wyznaczanie częstotliwości drgań powierzchni wody w prostopadłościennym naczyniu

Źródła – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej
– Olimpiady Fizyczne XXIII i XXIV, WSiP, Warszawa 1977
– Waldemar Gorzkowski: *Olimpiady fizyczne XXIII i XXIV*. WSiP, Warszawa 1977
– T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Masz do dyspozycji:

- Prostopadłościenne naczynie szklane lub drewniane o długości ścianki bocznej $L \approx 1\text{m}$,
- wodę do napełnienia naczynia do wysokości $h \ll L$,
- stoper.

Wpraw wodę w naczyniu w drganie, np. uderzając w ściankę prostopadłą do ścianki o długości L. Po wygaśnięciu drgań o wyższych częstościach pozostaną tylko drgania, podczas których powierzchnia wody waha się pozostając niemal płaską.

Wyznacz częstotliwość tych drgań f w zależności od wysokości słupa wody h oraz długości ścianki L. Metodą prób postaraj się do otrzymanych wyników dopasować możliwie prosty wzór algebraiczny.

Rozwiązanie zadania D – XXIII, stopień wstępny

Część teoretyczna

Zastanówmy się, jak można by wyprowadzić wzór teoretyczny na f. Ze względu na złożoność zagadnienia i związane z tym trudności nie tylko matematyczne, ścisłe obliczenia odpadają. Taki wzór możemy jednak wyprowadzić korzystając z analizy wymiarowej, tj. ze zbadania zgodności jednostek między f z jednej strony a jednostkami parametrów od których zależy f z drugiej strony. Jednak należy przyjąć, że zależność f od parametrów jest w postaci iloczynu parametrów podniesionych do pewnych wykładników bedących liczbami wymiernymi.

Zastanówmy się, od czego częstotliwość drgań f może zależeć. Z tekstu zadania wynika, że z parametrów układu w grę mogą wchodzić L i h. Jednak z samych tych wielkości nie można utworzyć wielkości z jednostką (o wymiarze) s^{-1}. Trzeba więc znaleźć jeszcze jakiś parametr, który charakteryzowałby badane zjawisko. Jednym z takich parametrów mogłaby być gęstość cieczy ρ. Łatwo jednak sprawdzić, że z L, h i ρ nie można otrzymać wielkości z jednostką s^{-1}, gdyż w żadnej z tych trzech wielkości nie ma sekundy w jednostce. Co więcej dochodzi kłopot z jednostką masy występującą w gęstości, której z kolei nie wiadomo, jak można by się pozbyć, więc ρ odrzucamy. Drgania zachodzą pod wpływem siły ciężkości, wobec tego jest dość prawdopodobne, że we wzorze na f wystąpi g. Zobaczmy więc, czy z L, h i g można skonstruować wielkość z jednostką s^{-1}. Zależność między f i tymi parametrami przedstawiamy w postaci:

$$f = \alpha L^a h^b g^c, \tag{1}$$

gdzie α – nieznany współczynnik liczbowy; a, b i c – liczby wymierne, które chcemy wyznaczyć. Równanie (1) dla jednostek ma postać:

$$\mathrm{s}^{-1} = \mathrm{m}^a \cdot \mathrm{m}^b \cdot \left(\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}\right)^c = \mathrm{m}^{a+b+c} \cdot \mathrm{s}^{-2c}. \tag{2}$$

Z równania tego, tzw. *równanie jednostek miar*, przez porównanie wykładników przy tej samej podstawie, tj. jednostce, mamy:
przy s: $-1 = 2c$, stąd $c = 1/2$,
przy m: $0 = a + b + c$, czyli $b = -a - 1/2$
Ponieważ mamy trzy parametry L, h i g i tym samym trzy niewiadome a, b i c a tylko dwa równania dla jednostek „s" i „m", więc jeden wykładnik jest nieokreślony. Niemniej otrzymujemy istotną informację dotyczącą zależności (1), którą możemy zapisać w postaci:

$$f = \alpha \left(\frac{L}{h}\right)^a \sqrt{\frac{g}{h}}\ . \tag{3}$$

Wzór (3) nadal przedstawia wiele różnych możliwych zależności częstotliwości, jednak teraz zawężonych do zależności od $\sqrt{h}$ i ilorazu L/h z wykładnikiem a. Postać (3) zależy od wartości parametru a, która jest szczególnie prostą dla a $a = -1$, wówczas:

$$f = \alpha\sqrt{g} \cdot \frac{\sqrt{h}}{L}. \tag{4}$$

Mając dane doświadczalne i przedstawiając je na wykresie, gdzie na osi poziomej są odkładane wartości $\sqrt{h}/L$ a na osi pionowej wartości f, możemy się przekonać czy układają się wzdłuż prostej. Jeśli tak – wówczas $a = -1$, natomiast ze współczynnika nachylenia tej prostej możemy oszacować wartość współczynnika liczbowego α. Na podstawie samej analizy wymiarowej nie jest możliwe wyznaczyć bezwymiarowego współczynnika α i, w tym przypadku, wykładnika a i trzeba odwołać się albo do doświadczenia, albo wykonać odpowiednie obliczenia.

Jeśli chodzi o ścisłe obliczenia, to sprawa wygląda beznadziejnie; ciecz bowiem nie porusza się jak ciało sztywne, każdy punkt cieczy porusza się z inną, trudną do określenia prędkością i bez z konieczności dość grubych przybliżeń nie można się obejść, a wzór otrzymany przy zbyt grubych przybliżeniach nie będzie miał wartości większej niż to, co otrzymuje się za pomocą analizy wymiarowej.

Zanim odwołamy się do doświadczenia spróbujmy sobie jakoś poradzić łącząc analizę wymiarową z naturalnymi wyobrażeniami dotyczącymi obserwowanego zjawiska.

Weźmy pod uwagę bardzo rozległy (nieskończony) zbiornik z wodą. Głębokość wody niech wynosi h. W rozpatrywanym zbiorniku mogą w zasadzie rozchodzić się dwa rodzaje fal. Jeden rodzaj to fale rozchodzące się przy samej powierzchni związane z napięciem powierzchniowym (zmarszczki na powierzchni). Ten rodzaj fal nas nie interesuje, bo w zadaniu chodzi o ruch cieczy zachodzący w całej objętości. Drugi zaś rodzaj fal, to właśnie fale nas interesujące, którym odpowiada ruch cząsteczek cieczy w całej objętości zbiornika. Wyznaczmy, podobnie jak poprzednio z analizy wymiarowej, prędkość tych fal. Łatwo zauważyć, że z wielkości charakteryzujących rozważane teraz zjawisko wielkość o wymiarze prędkości można utworzyć jedynie z h i g i to tylko w jeden sposób:

$$v = \alpha' \sqrt{gh}. \tag{5}$$

Gdzie α' to pewna stała bezwymiarowa.

A teraz wróćmy do naszego zadania. To co obserwujemy w naczyniu, to po prostu fala stojąca. Długość tej fali wynosi L. Długość odpowiedniej fali biegnącej wynosi więc $2L$, prędkość zaś jest określona przez (5), zatem częstotliwość drgań powinna być równa:

$$f = \frac{v}{2L} = \frac{\alpha'}{2} \frac{\sqrt{gh}}{L} = \frac{\alpha'}{2} \frac{h}{L} \sqrt{\frac{g}{h}}. \tag{6}$$

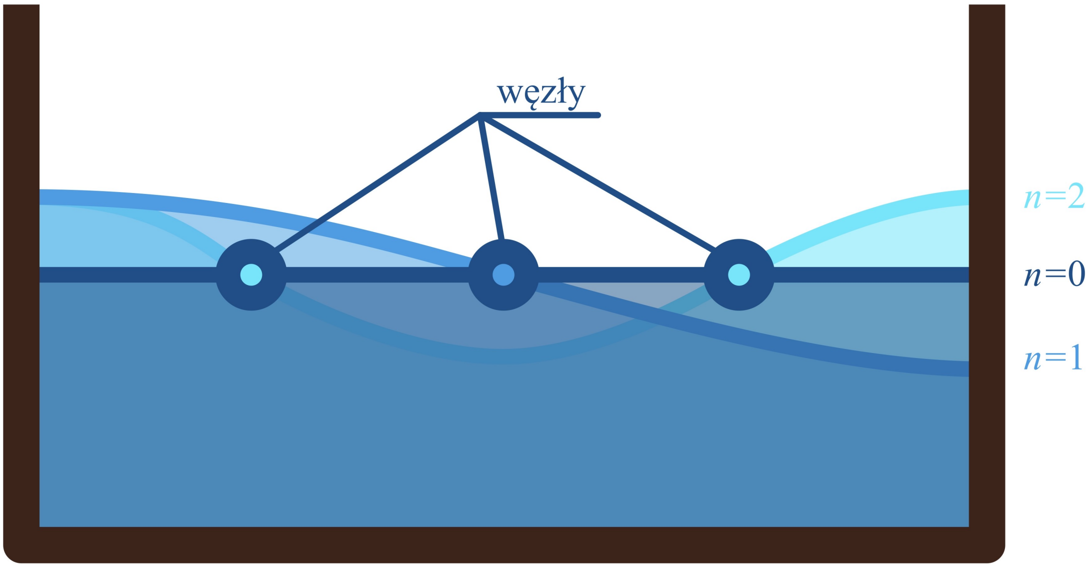
Porównując (6) z (3) mamy $a = -1$. Zatem

$$f \sim \frac{\sqrt{h}}{L}. \tag{7}$$

Tak więc otrzymaliśmy pewną zależność i powinniśmy ją sprawdzić doświadczalnie.

Zanim przejdziemy do krótkiego omówienia strony doświadczalnej zwróćmy uwagę, że w naczyniu może zachodzić więcej drgań. Drganie, o które chodzi w zadaniu, stanowi falę stojącą o jednym węźle. Możliwe są również fale stojące o liczbie węzłów równej 2, 3, 4 itd. Na rys. 1 pokazano fale stojące o jednym i dwóch węzłach. Zauważmy, że długość fali biegnącej odpowiadającej fali stojącej o n węzłach wynosi $2L/n$. Zatem dla drgań o n węzłach częstotliwość f_n powinna wyrażać się wzorem

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{\alpha' n}{2L} \sqrt{gh}. \tag{8}$$



Rys. 1

Jeżeli chodzi o wartość liczbową stałej α', to niestety nie można jej wyznaczyć w prosty sposób. Korzystając z metod stosowanych w mechanice ośrodków ciągłych przytaczamy wynik: $\alpha' = 1$. Więc ostatecznie wzór (8) ma postać:

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{gh} \tag{9}$$

Rozważaniom naszym można postawić pewien zarzut. Otóż przy wyprowadzaniu wzoru na v milcząco przyjęliśmy, że wielkość ta nie zależy od długości fali λ. Nie da się tego ukryć. To prawda. Czy jest to założenie słuszne? Jeżeli tak, to wzór na f jest poprawny, jeżeli zaś nie, to trzeba by doświadczalnie sprawdzić, który z nieskończenie wielu przypadków dla wykładnika α we wzorze (3) jest najlepiej spełniany, a to rzecz kłopotliwa.

Spróbujmy słuszność wspomnianego założenia rozstrzygnąć. Jeżeli v zależałoby od h i λ, to zawsze moglibyśmy przedstawić tę wielkość w postaci pewnej funkcji h i stosunku $\frac{h}{\lambda}$, co zapiszemy jako: $v = v(h, \frac{h}{\lambda})$. Zauważmy jednak, że jeżeli $h \ll \lambda$, to $\frac{h}{\lambda} \approx 0$ i wówczas:

$$v = v(h, \frac{h}{\lambda}) \approx v(h, 0) = v(h) \tag{10}$$

Tak więc w przypadku fal o długości λ znacznie przekraczającej głębokości zbiornika h wyprowadzony przez nas wzór ze spokojem możemy stosować. Teraz już wszystko jest w porządku, tyle tylko, że wzór na f można stosować jedynie wtedy, gdy $h \ll L$. Jeżeli zaś chodzi o dodatkowo wyprowadzony wzór (9) na f_n to rzecz jasna można go stosować dla takich n, dla których $h \ll \frac{L}{n}$.

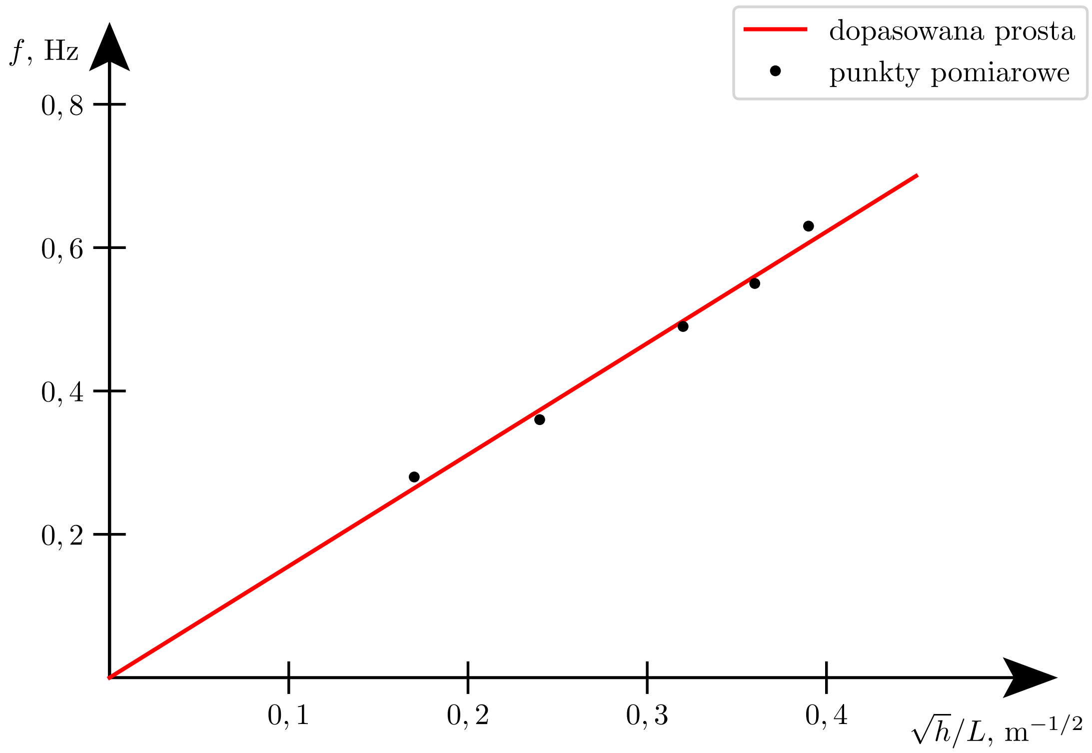
Podsumowując rozważania stwierdzamy, że szukana częstotliwość fali f powinna być proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z głębokości wody h i odwrotnie proporcjonalna do długości zbiornika L, co jest zapisane wzorem (7).

Część doświadczalna

Należy wykonać odpowiednie doświadczenie. W tym celu można skorzystać z długiego akwarium. Ze zmianami h nie ma problemu, jeżeli zaś chodzi o zmiany L, to dobrze jest zaopatrzyć się w dodatkową płytkę szklaną o szerokości nieco mniejszej niż szerokość akwarium. Na płytkę tę należy nałożyć dookoła nakładkę gumową, np. z rozciętego wzdłuż węża gumowego. Zmiany L osiąga się wkładając płytkę prostopadle w różne miejsca akwarium. Drgania możemy wzbudzać poprzez poruszenia płytki. Okres mierzymy za pomocą stopera, przy czym należy pamiętać, że dla zwiększenia dokładności pomiaru należy mierzyć okres nie jednego, lecz wielu drgań i brać średnią.

Ponieważ interesują nas drgania o niewielkiej amplitudzie, a takie czasami trudno obserwować, wygodnie jest umieścić w pobliżu akwarium żaróweczkę i obserwować drgania obrazu włókna żaróweczki powstałego wskutek odbicia.

Mając wyniki pomiarów f dla różnych wartości L i h należy sporządzić wykres zależności f od $\sqrt{h}/L$. Przy redakcji tego zadania sporządzono odpowiadający temu zagadnieniu wykres – rys. 2. Wykres ten przedstawia prostą, przy czym rozrzut punktów doświadczalnych jest dość mały.



Rys. 2

Komentarz

Na marginesie tego zadania warto poruszyć pewien problem ogólny dotyczący analizy wymiarowej. Uważny Czytelnik na pewno zwrócił uwagę, że niektórych mianowanych wielkości fizycznych w ogóle nie uwzględniliśmy w naszych rozważaniach, chociaż wydawałoby się, że mogą one odgrywać pewną rolę. Na przykład nie uwzględniliśmy lepkości. Łatwo zauważyć, że z jednostki lepkości $kg/(m \cdot s)$, z jednostki gęstości kg/m^3 oraz z jednostki długości m można utworzyć wielkość z jednostką s lub s^{-1}. Czy więc otrzymane przez nas wnioski są błędne? Otóż sprawa przedstawia się tak, że włączenie do rozważań każdej nowej wielkości, która nie jest bezwymiarową, równoważne jest powiększeniu zakresu zjawisk, które bierzemy pod uwagę, o te, w których ta wielkość odgrywa istotną rolę. Zilustrujemy to przykładem. Wiadomo, że lepkość powoduje dysypację energii, a w konsekwencji tłumienie drgań. Jeżeli więc do rozważań włączymy lepkość, to będzie to związane z uwzględnieniem w jakiejś normie tłumienia. Tymczasem tłumienie nas nie interesuje. Interesuje nas ruch okresowy, a więc nietłumiony. Wprawdzie tłumienie drgań wyższych w początkowym okresie po wzbudzeniu jest ważne, ale ta faza eksperymentu ma dla nas drugorzędny charakter. Przedmiotem naszych badań są jedynie drgania praktycznie nietłumione występujące po pewnym czasie od chwili wzbudzenia układu. Dlatego właśnie odrzuciliśmy lepkość z rozważań. Wielkość o wymiarze czasu otrzymana przy uwzględnieniu lepkości może charakteryzować czas zaniku drgań, ale nie może charakteryzować okresu drgań.

Z podobnych względów nie ma w naszych rozważaniach stałej gazowej R, bo nie interesują nas zmiany stanu; nie ma stałej Plancka h, bo zjawiska o charakterze kwantowym nie odgrywają tu roli; nie ma prędkości światła c, bo drgania odbywają się z niewielką prędkością i uwzględnianie efektów relatywistycznych jest zbędne itp.; w rozważaniach występuje natomiast przyspieszenie ziemskie g, bo siła ciężkości jest istotnym elementem badanego zjawiska.