XXV OLIMPIADA FIZYCZNA (1975/1976). Stopień II, zadanie teoretyczne – T2

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki: *Fizyka w Szkole* nr 4,1976;
W. Gorzkowski, A. Kotlicki: Olimpiada Fizyczna XXVII – XXVIII, WSiP, 1983.

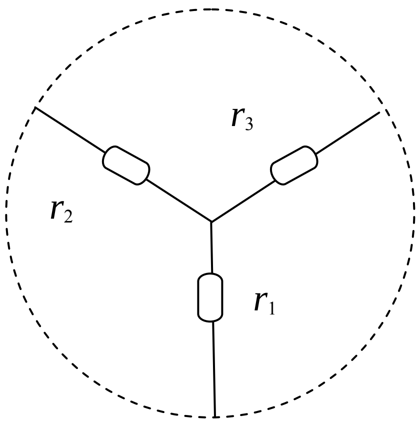
Nazwa zadania: Warunki równoważności obwodów „gwiazda” – „trójkąt”.

Działy: Elektryczność

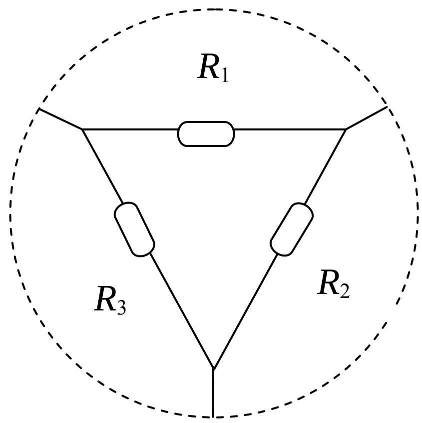
Słowa kluczowe: opór zastępczy, napięcie elektryczne, natężenie prądu, gwiazda, trójkąt.

Zadanie teoretyczne – T2, zawody II stopnia, XXV OF.

Jaki warunek konieczny i dostateczny muszą spełniać wielkości r_1, r_2, r_3, R_1, R_2, R_3, aby fragment obwodu pokazy na rysunku 1a był równoważny fragmentowi pokazanemu na rysunku 1b, to znaczy jaki warunek musi być spełniony, aby zamiana jednego fragmentu drugim w żadnym wypadku nie prowadziła do zmiany rozkładu napięć lub natężeń w obwodzie poza obszarem zaznaczonym przerywanym kółkiem?



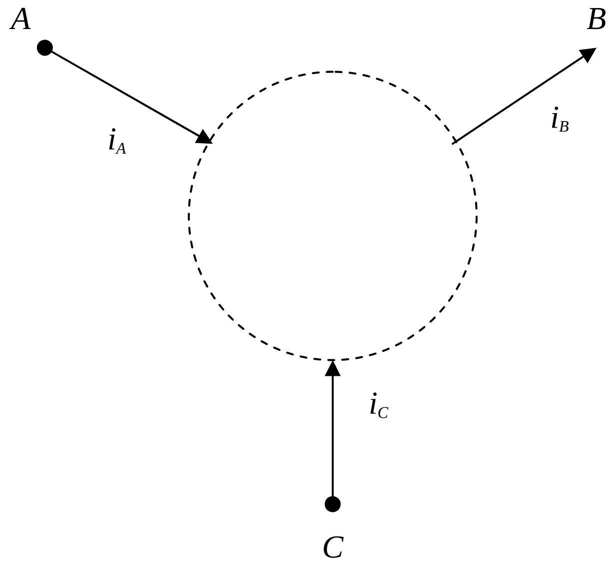
Rys.1a.



Rys.1b.

Rozwiązanie

„Czarna skrzynka” z dwoma wyjściami jest w pełni scharakteryzowana związkiem między jedynym napięciem i jedynym natężeniem, a więc jednym oporem zastępczym. Układ z trzema końcówkami (rys.2) scharakteryzowany jest związkiem między dwoma napięciami np. U_{AB} i U_{BC} (U_{AC} jest już wyznaczone przez te dwa) i dwoma natężeniami np. i_A i i_C ($i_B = i_A + i_C$). Ustalmy postać tego związku dla obu układów z rysunku 1, a następnie zbadajmy warunki równoważności obu zależności.

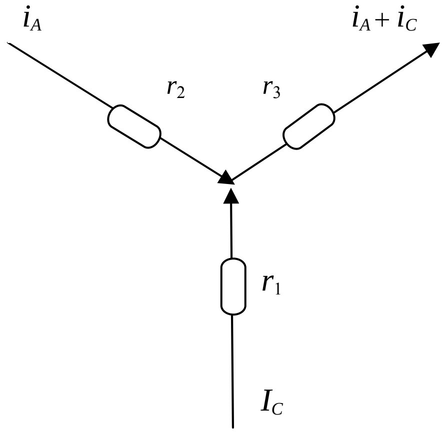


Rys. 2.

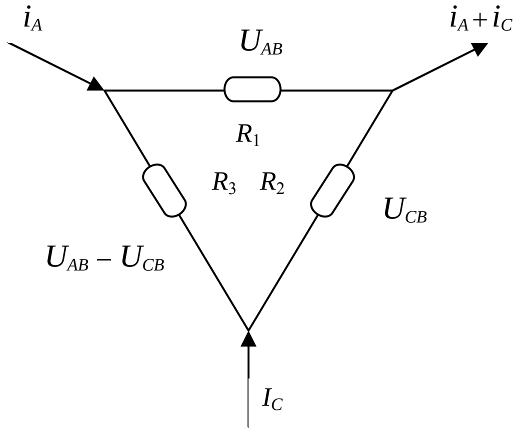
1. Dla gwiazdy (rys. 3a) mamy:

$$U_{AB} = i_A r_2 + (i_A + i_C) r_3 = i_A (r_2 + r_3) + I_C r_3,$$

$$U_{CB} = i_C r_1 + (i_A + i_C) r_3 = i_A r_3 + i_C (r_1 + r_3).$$



Rys.3a.



Rys.3b.

2. Dla trójkąta (rys. 3b) mamy:

$$i_A = \frac{U_{AB}}{R_1} + \frac{U_{AB} - U_{CB}}{R_3} = U_{AB}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right) - U_{CB}\frac{1}{R_3},$$

$$Ic = \frac{U_{CB}}{R_2} - \frac{U_{AB} - U_{CB}}{R_3} = -U_{AB}\frac{1}{R_3} + U_{CB}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right).$$

Rozwiązując układ równań dla gwiazdy (względem natężeniem) otrzymujemy:

$$i_A = U_{AB}\frac{r_1+r_2}{r_1r_2r_3\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)} - U_{CB}\frac{r_3}{r_1r_2r_3\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)},$$

$$I_C = -U_{AB}\frac{r_3}{r_1r_2r_3\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)} + U_{CB}\frac{r_2+r_3}{r_1r_2r_3\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)}.$$

Żądane nieodróżnialności trójkąta od gwiazdy jest równoważne żądaniu, by dwa ostatnie układy równań były identyczne. Oznacza to, że odpowiednie współczynniki muszą być równe:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3} = \frac{r_1+r_3}{r_1r_2r_3\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)},$$

$$\frac{1}{R_3} = \frac{r_3}{r_1r_2r_3\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)},$$

$$\frac{1}{|R_2|}+\frac{1}{|R_3|} = \frac{r_2+r_3}{r_1r_2r_3\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)}.$$

Związki te stanowią szukany warunek konieczny i dostateczny. Po krótkich przekształceniach można je napisać w bardziej symetrycznej postaci:

$$r_i = \frac{1}{R_i}\frac{R_1R_2R_3}{R_1+R_2+R_3},\ i = 1, 2, 3.$$

Do wzorów tych można dojść szybciej rozpatrując sytuacje szczególne (np. dołączając napięcie do różnych odpowiadających sobie par końcówek obu układów, pozostawiając trzecią końcówkę wolną). W ten sposób można wykazać, że znalezione przez nas wzory są konieczne, podczas gdy w zadaniu chodzi o warunek konieczny i dostateczny.

Zadanie powyższe jest w swej istocie zadaniem oryginalnym, jednakże w literaturze na poziomie dostępnym uczniom (tj. bez rachunku macierzowego) autorzy z reguły ograniczają się do rozpatrywania kilu przypadków szczególnych, dowodząc jedynie konieczności otrzymywanych przez nas związków. Z tego właśnie względu rozwiązania, które mogły dać co najwyżej warunek konieczny, były oceniane na nie więcej niż 5 punktów. Za pełne rozwiązanie przyznawano oczywiście 10 punktów. W rozwiązaniach uczniowskich dominowały rozwiązania dające warunek konieczny. Wskutek tego zadanie wypadło słabiej niż można było oczekiwać.