

XXV OLIMPIADA FIZYCZNA (1975/1976) . Stopień III, zadanie teoretyczne – T3.

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Andrzej Szymacha: Olimpiady Fizyczne XXV-XXVI, WSiP, Warszawa 1979.

Nazwa zadania: Promień kątowy łuku tęczy

Działy: Optyka geometryczna

Słowa kluczowe: Współczynnik załamania, widmo widzialne, długość fali, zjawisko tęczy, wysokość katowa Słońca, prawo Snelliusa

Zadanie teoretyczne – T3, zawody teoretyczne III stopnia, XXV OF.

Nad rozległą, poziomą równią rozpylono z samolotu ciekły, bezbarwny środek owadobójczy o współczynnikach załamania dla skrajnych obszarów widma widzialnego równych: $n_{cz} = 1,460$ (dla czerwieni) i $n_f = 1,470$ (dla fioletu). Zanim kropelki cieczy opadły na ziemię, nad równiną zaobserwowano tęczę związaną z występowaniem tych kropelek w powietrzu. Wyznacz promień kątowy czerwonego i fioletowego łuku tęczy. Jakie ograniczenie na wysokość katową Słońca nad horyzontem wnika z faktu, że tęczę w ogóle zaobserwowano? Zakładamy, że Słońce jest punktowym, bardzo odległym od Ziemi źródłem światła.

Wskazówka: Wykaż, że dla różnych długości fali ekstremalne wartości kąta, pod jakim promień opuszcza kropelkę po jednokrotnym wewnętrznym odbiciu, są różne. Wykaż, że maksimum natężenia danej barwy odpowiada ekstremalnej wartości wspomnianego wyżej kąta. Efektów związanych z wielokrotnymi odbiciami promieni w kropelkach można nie rozpatrywać.

Rozwiązanie

Zjawisko tęczy wiąże się z rozszczepieniem światła przy załamaniu na kroplach cieczy rozpylonej w powietrzu. Zaczniemy od zbadania zjawiska przechodzenia promienia światła przez przezroczystą kulkę bez wewnętrznego odbicia.

Z rysunku 1 odczytujemy, że kąt odchylenia promienia $\varphi = 2(\alpha - \beta)$. Interesuje nas zależność $\varphi(\alpha)$, którą możemy uzyskać po skorzystaniu z prawa załamania

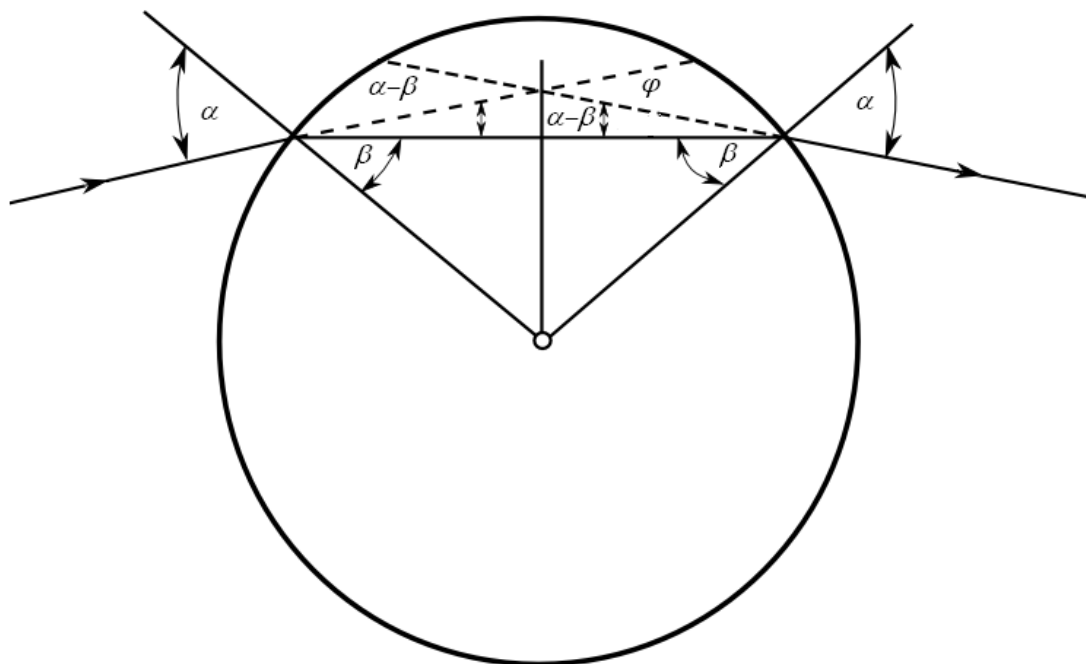
$$\sin \alpha = n \sin \beta.$$

Ostatecznie

$$\varphi = 2\alpha - 2 \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right). \quad (1)$$

W celu zbadania przebiegu tej funkcji obliczymy jej pochodną

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\alpha} &= 2 - \frac{2}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}} \cos \alpha = 2 \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right) = \\ &= \frac{2(n^2 - 1)}{(n^2 - 1) + \cos^2 \alpha + \cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}. \end{aligned} \quad (2)$$



Rys. 1

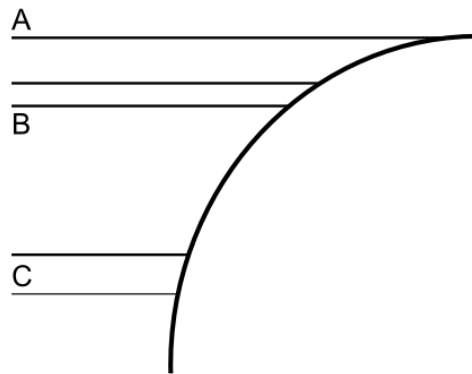
Widać wprost z postaci tej pochodnej, że nie jest ona nigdy równa zero i że jest zawsze dodatnia. Kąt φ jest zatem monotonicznie rosnącą funkcją kąta α . W tej sytuacji maksymalna wartość kąta φ odpowiada największej możliwej wartości kąta padania, tj. $\alpha = 90^\circ$. Ta maksymalna wartość wynosi

$$\varphi_{\max} = 180^\circ - 2 \arcsin\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3)$$

Wartość ta zależy od współczynnika załamania, a więc i od barwy światła, i mogłoby się wydawać, że ten proces właśnie jest odpowiedzialny za powstawanie tęczy. Zauważymy jednak, że natężenie światła ugiętego pod kątem bliskim φ_{\max} szybko spada do zera. Odpowiedzialne są za to aż dwa efekty. Po pierwsze przy kątach padania bliskich 90° (a tym wartościom kąta α odpowiada odchylenie o kąty bliskie φ_{\max}) bardzo mała ilość energii światła wnika do ośrodka optycznie gęstszy, większość ulega odbiciu na powierzchni kuli.

Po wtóre, ze względu na skończoną wartość pochodnej $\frac{d\varphi}{d\alpha}$ nawet dla $\alpha \rightarrow 90^\circ$, skończonemu przedziałowi kąta $d\alpha$ odpowiada skończona wartość przedziału kąta $d\varphi$. Przy niemal stycznym padaniu promienia ustalonemu niewielkiemu przedziałowi kąta $d\alpha$ odpowiada bardzo małe pole powierzchni paska w płaszczyźnie prostopadłej do promienia, a tym samym do bardzo mała ilość energii (ilość ta dąży do 0, gdy $\alpha \rightarrow 90^\circ$).

Najlepiej wyjaśnia to rysunek 2.



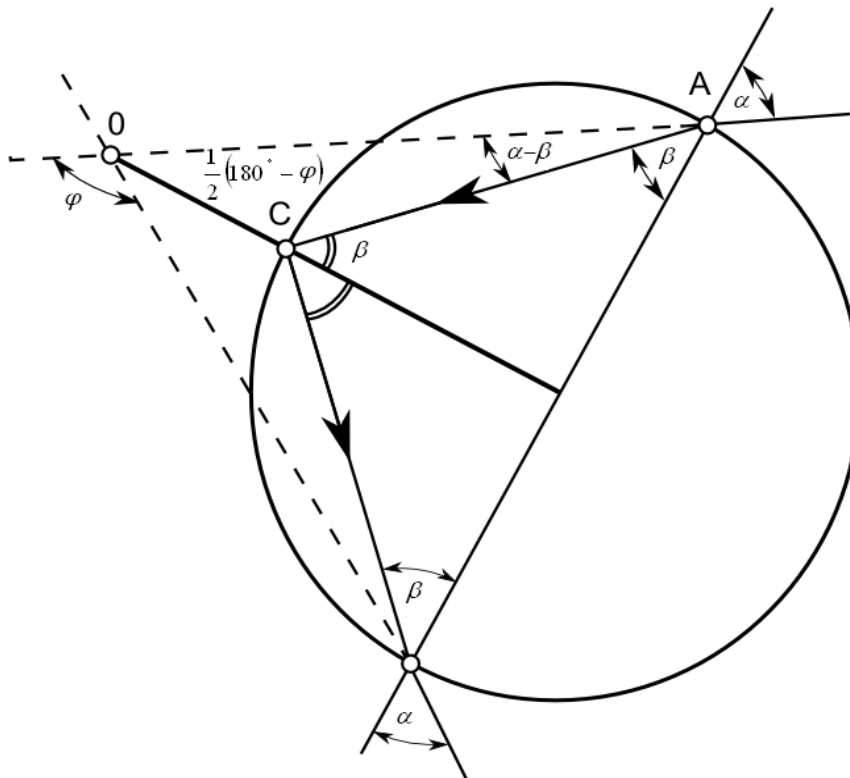
Rys. 2

Trzy wiązki A , B i C odpowiadają temu samemu przedziałowi $d\alpha$, lecz różnymi α . Wiązka A odpowiadająca wartości $\alpha = 90^\circ$ jest tak wąska, że na naszym rysunku reprezentuje ją jedna kreska!

Ostatecznie dochodzimy do wniosku, że kąty φ bliskie φ_{\max} są nieinteresujące, bo pada tam bardzo mało światła.

Jeżeli teraz ograniczymy się do kątów niezbyt bliskich φ_{\max} , to zauważymy, że dla danej wartości φ i dla każdej wartości n z niewielkiego przedziału (a więc dla każdej barwy światła) istnieje takie α , że zaobserwujemy promień ugięty pod tym właśnie kątem φ . A zatem patrząc w danym kierunku oko nasze będzie rejestrowało równocześnie światło o wszystkich możliwych barwach. W efekcie pod każdym kątem (a przynajmniej tam, gdzie pada zauważalna ilość światła ugiętego) ujrzymy jaśniejsze, bądź ciemniejsze światło szare. Zobaczmy po prostu oświetloną mgłę.

Żeby uzyskać efekt tęczy, musimy rozpatrzyć następną co do stopnia złożoności bieg promieniowania wnikającego i wychodzącego z kropli. Będzie to promień, który uległ jednokrotnemu odbiciu od wewnętrznej strony powierzchni kuli (rys. 3).



Rys. 3

Twierdzenie o kącie zewnętrznym zastosowanie do trójkąta AOC daje

$$\beta = \alpha - \beta + \frac{1}{2}(180^\circ - \varphi),$$

Czyli

$$\varphi = 180^\circ + 2\alpha - 4\beta.$$

Korzystając z prawa załamania

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right),$$

dostajemy jawną zależność φ od α :

$$\varphi = 180^\circ + 2\alpha - 4 \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right). \quad (4)$$

Zależność ta różni się od analogicznej zależności dla promienia nie ulegającego odbiciu wewnątrz kropli przede wszystkim tym, że kąt φ osiąga wartość minimalną dla pewnego kąta $\alpha_0 < 90^\circ$. Innymi słowy jest takie α_0 i takie φ_{\min} , że $\left.\frac{d\varphi}{d\alpha}\right|_{\alpha_0=\alpha} = 0$, a to właśnie oznacza pojawienie się tęczy, co wykażemy za chwilę dokładniej. Na razie postaramy się wyznaczyć te wartości przez zbadanie pochodnej funkcji $\varphi(\alpha)$ określonej równaniem (4):

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = 2 - \frac{4}{n} \cos \alpha \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}}. \quad (5)$$

Przyrównując $\frac{d\varphi}{d\alpha}$ do zera i oznaczając tę szczególną wartość kąta α , dla której to zachodzi, przez α_0 dostajemy równanie

$$2 - \frac{4}{n} \cos \alpha_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha_0}{n^2}}} = 0, \quad (6)$$

które łatwo rozwiążemy stosując elementarne przekształcenia

$$\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_0} = 2 \cos \alpha_0,$$

$$n^2 - \sin^2 \alpha_0 = 4 \cos^2 \alpha_0,$$

$$n^2 = 4 \cos^2 \alpha_0 + \sin^2 \alpha_0 = 3 \cos^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0 + \sin^2 \alpha_0 = 1 + 3 \cos^2 \alpha_0,$$

$$\cos^2 \alpha_0 = \frac{n^2 - 1}{3},$$

$$\cos \alpha_0 = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}. \quad (7)$$

Rozwiązanie to ma sens dla wszystkich $1 \leq n \leq 2$. Dla $n > 2$ dostalibyśmy $\cos \alpha_0 > 1$ zależność $\varphi(\alpha)$ byłaby znów monotoniczna.

Znając $\cos \alpha_0$ łatwo obliczymy $\sin \alpha_0$:

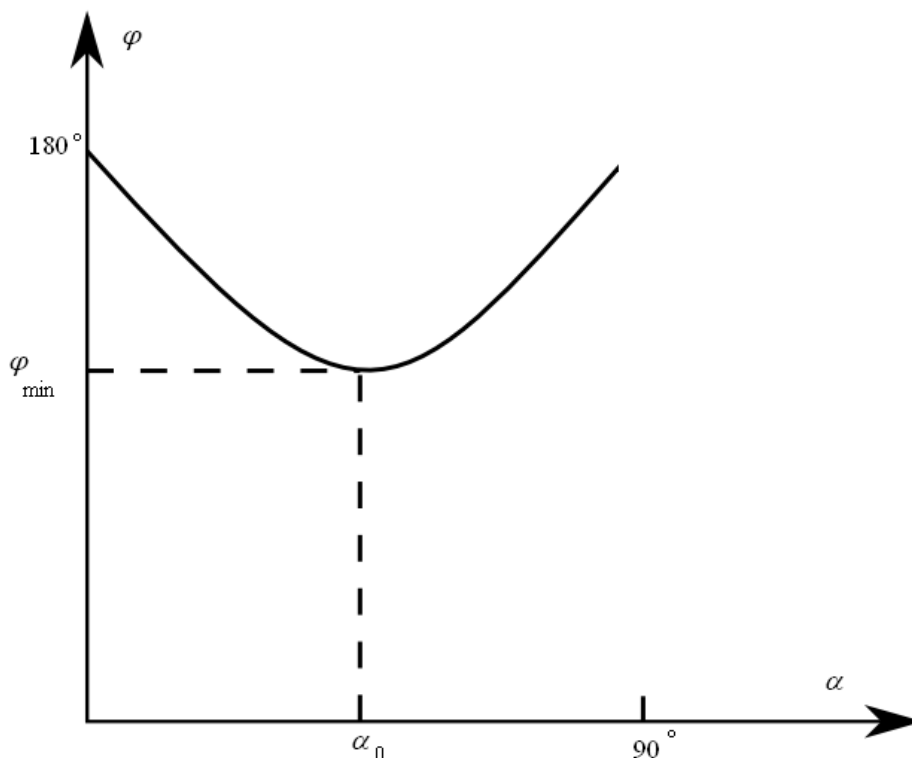
$$\sin \alpha_0 = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}},$$

który po wstawieniu do wzoru (4) pozwoli nam obliczyć φ_{\min} :

$$\varphi_{\min} = 180^\circ + 2 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3}} - 4 \arcsin \sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}}. \quad (8)$$

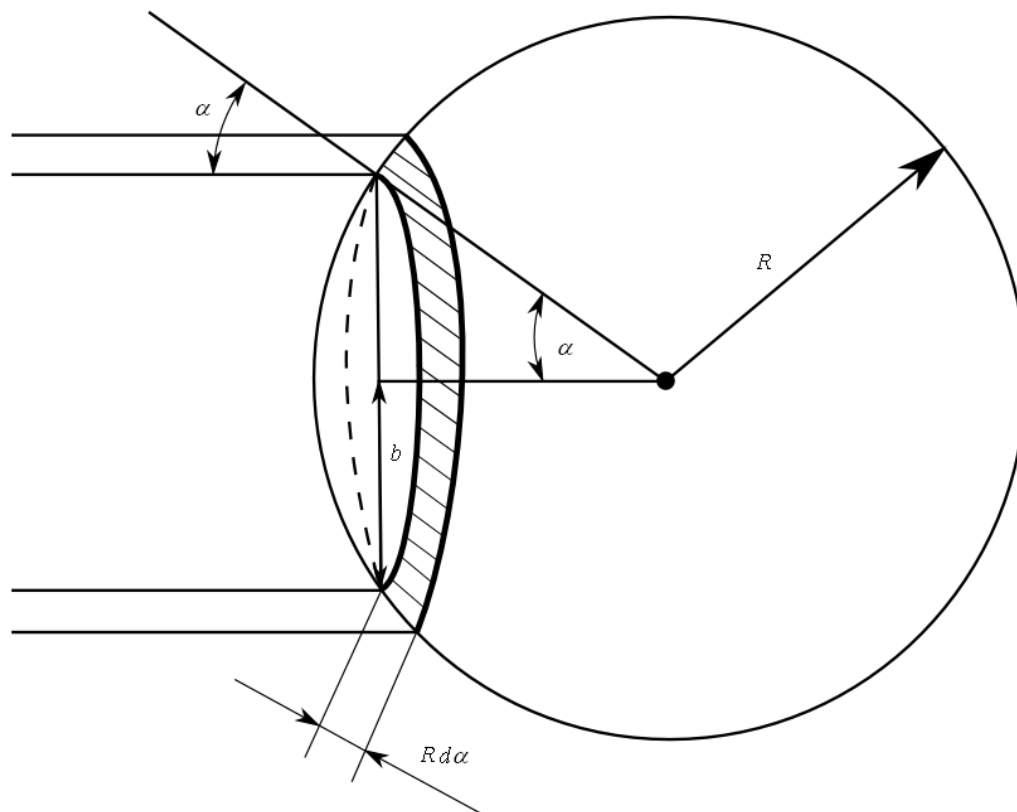
Naszkujejmy wykres funkcji $\varphi(\alpha)$.

Łatwo przekonać się, że dla $\alpha = 0$, $\varphi(0) = 180^\circ$. Ustaliliśmy również, że dla $\alpha = \alpha_0$, φ osiąga wartości φ_{\min} . Zatem wykres musi wyglądać następująco (rys. 4);



Rys. 4

Zastanówmy się teraz nad stosunkami energetycznymi w świetle ugiętym, Promienie świetlne padające pod ustalonym kątem α na kropkę tworzą okrąg o promieniu b (rys. 5).



Rys. 5

Promień tego okręgu

$$b = R \sin \alpha \quad (9)$$

Każdy z tych promieni ulegnie odchyleniu o ten sam kąt $\varphi(\alpha)$, zatem w dużej odległości od kropli, promienie te będą rozchodzić się jako tworzące stożka o kącie, między osią a tworzącą, równym $\varphi(\alpha)$ (rys. 6).

Rozpatrzmy teraz nie ten jeden stożek, lecz zbiór promieni odpowiadający pewnemu przedziałowi kątów α zwartych między α a $\alpha + d\alpha$. Będą to wszystkie promienie, jakie padają na pewien pasek kulki, którego fragment zakreskowano na rysunku 5.

Promienie padające, które spełniają te warunki, tworzą jakby „rurę” o promieniu $R \sin \alpha$ i grubości „ścianki”

$$R(d\alpha) \cos \alpha,$$

Co łatwo zrozumieć rzutując łuk $R d\alpha$ (zaznaczony na rysunku 5) na kierunek prostopadły do kierunku padania światła. Po oznaczeniu natężenia światła (ilość energii na jednostkę powierzchni) padającego przez I_0 , dostajemy całkowitą energię rozpatrywanej wiązki równą iloczynowi I_0 i pola przekroju rury równego $2\pi R \sin \alpha$ mnożone przez $R \cos \alpha d\alpha$. Ostatecznie

$$dI = I_0 2\pi R^2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha. \quad (10)$$

Ostatecznie

$$\text{Ilość światła} = I_0 \frac{S I_0 2\pi R^2 \sin \alpha \cos \alpha}{l^2 \sin \varphi \left| \frac{d\varphi}{d\alpha} \right|}. \quad (11)$$

Wyprowadzenie powyższe jest uniwersalne, słuszne również dla poprzedniego przypadku odchylenia światła bez wewnętrznego odbicia. Wzór ten dokładniej precyzuje, dlatego przy różnej od zera pochodnej $\frac{d\varphi}{d\alpha}$ dostaliśmy zerowe natężenie przy kątach φ , którym odpowiada kąt $\alpha = 90^\circ$. Znika wtedy $\cos \alpha$ w liczniku wyrażenia (11).

W przypadku załamania światła połączonego z odbiciem przekonaliśmy się, że $\frac{d\varphi}{d\alpha}$ znika dla $\alpha = \alpha_0$ czyli dla $\varphi = \varphi_{\min}$.

W tym kierunku oko zaobserwuje nieskończone natężenie światła (ze względu na efekty dyfrakcji ilość ta będzie skończona, ale bardzo duża). Jest to sytuacja typowa dla zjawiska ogniskowania. Gdybyśmy pod tym kątem rozpatrzyli działanie na przykład zwierciadła kulistego wklęsłego, na które pada równoległa do osi wiązka światła, to ze względu na zjawisko aberracji sferycznej, na małym ekranie ustawionym w ognisku prostopadle do osi, oświetlone byłoby nie tylko ognisko, ale i jego otoczenie. Obliczając natężenie światła analogicznie jak w powyższym przypadku też uzyskalibyśmy wynik, że w ognisku natężenie byłoby nieskończone. W praktyce nasz oko mogłoby odbierać wrażenie, że naprawdę oświetlony jest tylko jeden punkt – ognisko. Z tych samych powodów w zjawisku tęczy w praktyce wydaje nam się, że ugięte światło dochodzi do nas z jednego tylko kierunku wyznaczonego przez φ_{\min} . Ale wartość φ_{\min} zależy od n (wzór (8)), a więc od barwy światła. Tym samym różne składowe barwne będziemy widzieli pod różnymi kątami. Takie jest wyjaśnienie zjawiska tęczy.

Obliczmy teraz dla naszej substancji wartości φ_{\min} odpowiadające światłu czerwonemu i fioletowemu

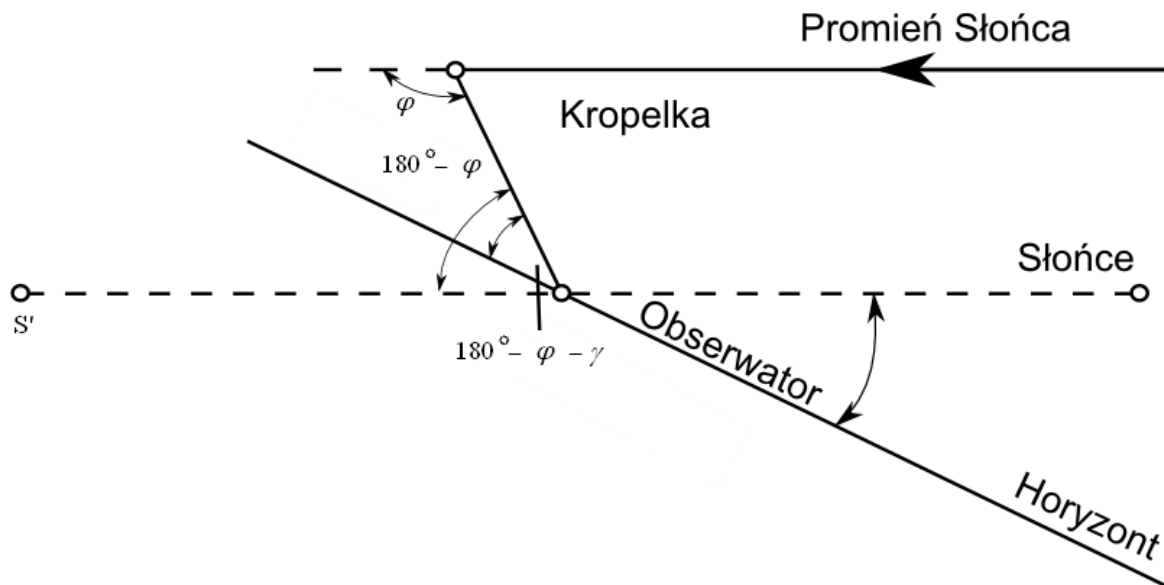
$$\varphi_{\min}(\text{czerwone}) = 180^\circ + 2 \arcsin \sqrt{\frac{4 - (1,460)^2}{3}}$$

$$- 4 \arcsin \sqrt{\frac{4 - (1,460)^2}{3 \cdot (1,460)^2}} = 153^\circ 20' 16''$$

$$\varphi_{\min}(\text{fioletowe}) = 180^\circ + 2 \arcsin \sqrt{\frac{4 - (1,470)^2}{3}}$$

$$- 4 \arcsin \sqrt{\frac{4 - (1,470)^2}{3 \cdot (1,470)^2}} = 154^\circ 19' 57''.$$

Łatwo możemy powiązać promień kątowy tęczy (dla danej barwy) z odpowiednią wartością φ (rys. 7).



Rys. 7

Ze względu na symetrię względem osi Słońce – obserwator, ten ostatni będzie widział światło danej barwy dochodzące od wszystkich kropelek, dla których kierunek obserwacji tworzy z kierunkiem do przeciwobrazu Słońca (pod horyzontem) S' kąt $180^\circ - \varphi$. Kropelki te tworzą na sferze niebieskiej łuk okręgu o promieniu kątowym $180^\circ - \varphi$, czyli

$$r_{cz} = 180^\circ - 153^\circ 20' = 26^\circ 40',$$

$$r_f = 180^\circ - 154^\circ 20' = 25^\circ 40'.$$

Obserwator na Ziemi widzi oczywiście tylko część okręgu tęczy. Warunek by jakikolwiek fragment tego okręgu był widoczny, jest oczywisty.

Kąt

$$180^\circ - \varphi - \gamma_s,$$

który charakteryzuje kątową wysokość nad horyzontem najwyższego punktu łuku tęczy (rys. 7), musi być dodatni, zatem

$$\gamma_s < 180^\circ - \varphi = r.$$

Kiedy Słońce właśnie zachodzi (lub wschodzi), wtedy $\gamma_s = 0$ i widzimy połówkę tęczy, czyli największy fragment, jaki możemy zaobserwować z powierzchni Ziemi. Z samolotu możemy zobaczyć nawet pełny okrąg.

Na zakończenie obliczymy $180^\circ - \varphi$ dla wody

$$\varphi_{\min} = 137^\circ 58',$$

$$r_{\text{tęczy}} = 42^\circ 2'.$$

Uwagi

Zadanie powyższe wypadło bardzo słabo mimo wskazówki jednoznacznie wytyczającej drogę postępowania. Jest rzeczą zaskakującą, że zdecydowana większość uczestników w ogóle nie czyta wskazówek. Dotyczy to zadań wszystkich stopni. A przecież, jak widać z rozwiązań zadań publikowanych w książeczkach poświęconych Olimpiadom Fizycznym, wskazówki zawsze upraszczają rozwiązanie.