XXV OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP WSTĘPNY
Zadania teoretyczne

ZADANIE T1

Nazwa zadania: „Twierdzenie Steinera i moment bezwładności”

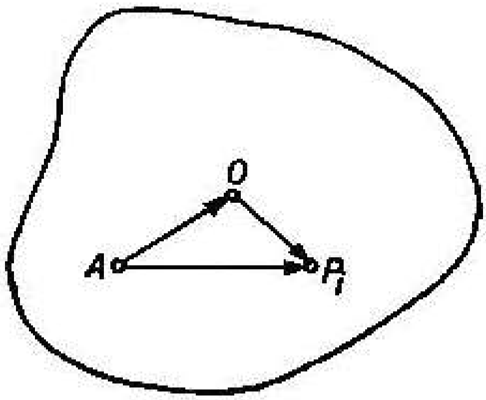
A) Udowodnij twierdzenie Steinera mówiące, że:

Moment bezwładności $\boldsymbol{I_A}$ ciała o masie $\boldsymbol{m}$ względem osi $\boldsymbol{A}$, równoległej do osi $\boldsymbol{O}$ i przechodzącej przez środek masy ciała, wynosi

$$I_A = I_O + md^2,$$

gdzie $\boldsymbol{I_O}$ oznacza moment bezwładności ciała względem osi $\boldsymbol{O}$, a $\boldsymbol{d}$ jest odległością prostych $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{O}$.

B) Obliczyć moment bezwładności jednorodnego graniastosłupa prostego o podstawie w kształcie trójkąta równobocznego o boku $\boldsymbol{a}$ względem osi przechodzącej przez środki podstaw. Masa graniastosłupa wynosi $\boldsymbol{m}$.



Rys. 1

ROZWIĄZANIE ZADANIA T1

A) Narysujmy jedną z płaszczyzn ciała prostopadłą do osi obrotu (rys. 1) zaznaczając na niej punkty przebicia osią $\boldsymbol{A}$ i osią $\boldsymbol{O}$. Rozważmy ponadto dowolny punkt ciała $\boldsymbol{P_i}$ leżący na tej płaszczyźnie. Spełnione jest równanie wektorowe:

$$\overrightarrow{AP_i} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP_i}. \qquad (1)$$

Ponosząc obie strony do kwadratu, dostajemy

$$\left(\overrightarrow{AP_i}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AO}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OP_i}\right)^2 + 2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OP_i}. \qquad (2)$$

Mnożąc powyższe równanie stronami przez masę punktu materialnego $\boldsymbol{P_i}$ równą $\boldsymbol{m_i}$ i sumując po wszystkich punktach ciała dostaniemy

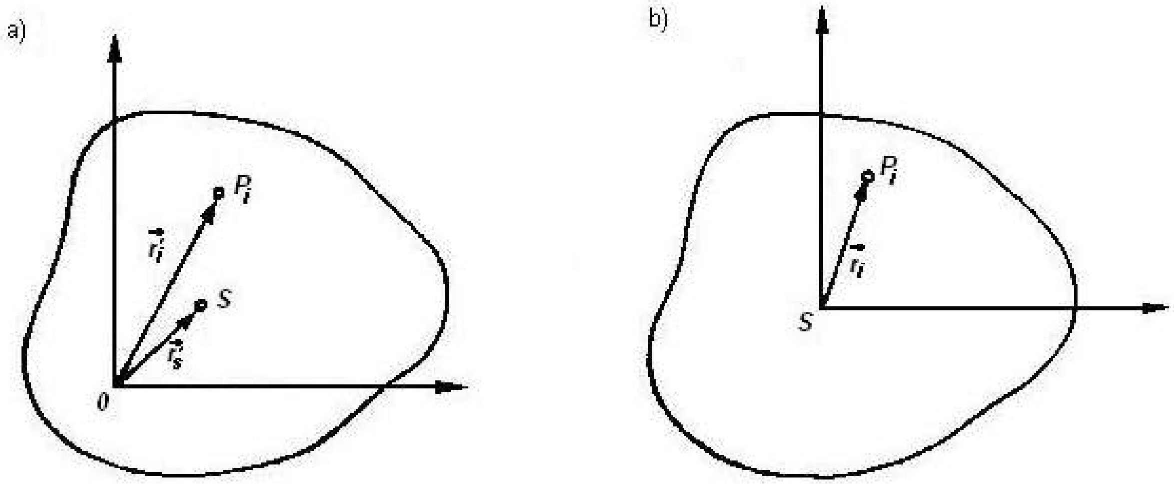
$$\sum m_i\left(\overrightarrow{AP_i}\right)^2 = \sum m_i\left(\overrightarrow{AO}\right)^2 + \sum m_i\left(\overrightarrow{OP_i}\right)^2 + 2\sum m_i\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OP_i}. \qquad (3)$$

W wyrazie pierwszym i trzecim po prawej stronie wyciągamy stałe czynniki przed znak sumy:

$$\sum m_i \left(\overrightarrow{AP_i}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AO}\right)^2 \cdot \sum m_i + \sum m_i \left(\overrightarrow{OP_i}\right)^2 + 2\overrightarrow{AO} \cdot \sum m_i \cdot \overrightarrow{OP_i}. \tag{4}$$

Dwa spośród czterech wyrazów w powyższym równaniu są z definicji momentami bezwładności odpowiednio względem osi ***A*** i względem osi ***O***. Suma $\sum m_i$ to oczywiście całkowicie całkowita masa ciała, zaś $\left(\overrightarrow{AO}\right)^2 = d^2$. Zatem

$$I_A = I_O + md^2 + 2\overrightarrow{AO} \cdot \sum m_i \cdot \overrightarrow{OP_i}. \tag{5}$$



Rys. 2

W powyższym wyprowadzeniu nie korzystaliśmy jeszcze z faktu, że oś ***O*** przechodzi przez środek masy ciała. Dlatego wzór (5) różni się od wzoru wyrażającego twierdzenie Steinera. Twierdzenie będzie udowodnione, jeśli wykażemy, że wyrażenie

$$\sum m_i \overrightarrow{OP_i} \tag{6}$$

Jest równe zeru, jeśli oś ***O*** przechodzi przez środek masy ciała. Dowodów można podać tyle, ile jest różnych definicji środka masy. Skorzystamy z następującej: Środek masy S jest to punkt o wektorze wodzącym (rys. 2a):

$$\vec{r}_B' = \frac{\sum m_i \vec{r}_i'}{\sum m_i}. \tag{7}$$

Wyobraźmy sobie teraz, że wybraliśmy początek układu współrzędnych, od razu w środku masy (rys. 2b). W układzie tym wektor wodzący $\vec{r}_B' = 0,$ zatem wzór (7) przyjmie postać

$$0 = \sum m_i \vec{r}_i \Leftrightarrow \begin{matrix} 0 = \sum m_i x_i \\ 0 = \sum m_i y_i \\ 0 = \sum m_i z_i \end{matrix} \tag{8}$$

gdzie $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i).$

Niech wreszcie oś z naszego układu pokrywa się z osie ***O***. Wzory (7) i (8) są słuszne dla dowolnej orientacji osi układu współrzędnych, a wiec w szczególności i dla układu z osią z pokrywającą się z osia ***O***. Wektor $\overrightarrow{OP_i}$ jest w tym wypadku rzutem wektora $\vec{r}_i$ na płaszczyznę xy. Innymi słowy

$$\overrightarrow{OP_i} = (x_i, y_i, 0). \tag{9}$$

Wracając do wektora $\sum m_i \overrightarrow{OP_i}$ widzimy, że jego poszczególne współrzędne wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} \left(\sum m_i \overrightarrow{OP_i}\right)_x &= \sum m_i x_i, \\ \left(\sum m_i \overrightarrow{OP_i}\right)_y &= \sum m_i y_i, \\ \left(\sum m_i \overrightarrow{OP_i}\right)_z &= \sum m_i\, 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Porównując z równaniem (8) widzimy, że istotnie $\sum m_i \overrightarrow{OP_i} = 0$ c.b.d.o.

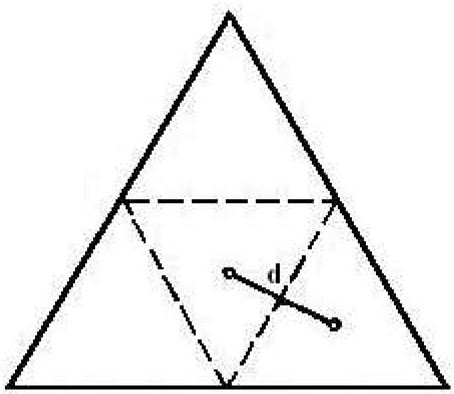
B) Jest oczywiste, że moment bezwładności graniastosłupa prostego względem osi prostopadłej do podstawy jest równy momentowi bezwładności figury płaskiej pokrywającą się z podstawą i o masie równej masie całego graniastosłupa. Zadanie sprowadza się więc do obliczenia momentu bezwładności trójkąta równobocznego o boku ***a*** i masie ***m*** względem osi prostopadłej do trójkąta i przechodzącej przez jego środek.

Zestawienie tego zadania wraz z twierdzeniem Steinera sugeruje, że najszybciej dojdziemy do celu wykorzystując wcześniejsze udowodnione twierdzenie.

Podzielmy nasz trójkąt na cztery mniejsze trójkąty (rys. 3) i zauważymy, że poszukiwany wzór powinien mieć postać

$$I_\Delta = \alpha m a^2, \tag{1}$$

gdzie α jest poszukiwanym współczynnikiem liczbowym niezależnym Anie do masy, ani od boku trójkąta.



Rys. 3

Poszukiwany moment bezwładności można również przedstawić jako sumę momentów bezwładności czterech mniejszych trójkątów. Moment bezwładności trójkąta centralnego oznaczamy przez ***I_1***, a jednego ze skrajnych – przez ***I_2***. Na podstawie wzoru (1) mamy

$$I_1 = \alpha\left(\frac{1}{4}m\right)\left(\frac{1}{2}a\right)^2, \tag{2}$$

gdyż masa tego trójkąta wynosi $\frac{1}{4}m,$ a bok $\frac{1}{2}a.$

W celu obliczenia I2 skorzystamy z twierdzenia Steinera.

$$I_2 = I_1 + \left(\frac{1}{4}m\right)d^2,$$

gdzie ***d*** – odległość od środka dużego trójkąta (względem którego liczymy całkowity moment bezwładności) do środka masy małego trójkąta. Ponieważ

$$I_\Delta = I_1 + 3I_2 = I_1 + 3\left(I_1 + \frac{1}{4}md^2\right) = 4I_1 + \frac{3}{4}md^2, \tag{3}$$

więc

$$\alpha ma^2 = 4\alpha\left(\frac{1}{4}m\right)\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \frac{3}{4}m\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2, \tag{4}$$

gdzie skorzystaliśmy z wartości $d = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ bardzo łatwiej do wyznaczenia jako $\frac{1}{3}$ wysokości całego trójkąta.

Porządkując wzór (4) dostaniemy

$$\frac{3}{4}\alpha ma^2 = \frac{3}{48}ma^2. \tag{5}$$

Stąd

$$\alpha = \frac{1}{12}.$$

Ostatecznie

$$I_\Delta = \frac{1}{12}ma^2.$$

Aby dowód był kompletny, powinniśmy jeszcze wykazać, że założenie: $I_\Delta = \alpha ma^2$ ze stałą α niezależną ani od ***a***, ani od ***m*** jest rzeczywiście słuszne. W tym celu napiszemy ogólny wzór na moment bezwładności:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

I zastanówmy się, jak zmieniłaby się ta wielkość, gdybyśmy bez zmiany kształtu ciała powiększyli jego masę (zwiększając gęstość). Oznaczałoby to, że każda elementarna masa $\boldsymbol{m_i}$ pomnożyłaby się przez ten sam czynnik, o który zwiększaliśmy całkowitą masę. A zatem przy danym kształcie, moment bezwładności jednorodnej bryły musi być proporcjonalny do jej masy:

$$\boldsymbol{I \sim m.}$$

Wyobraźmy sobie teraz, że nie zmieniając masy ciała zmieniamy jego rozmiary przez jednokładność. Możemy to wyobrazić sobie w ten sposób, że wszystkie elementy masy $\boldsymbol{m_i}$ oddalamy od punktu ***O*** powiększając ich wektory wodzące o stały czynnik ***k***. Każdy ze składników sumy powiększy się o $\boldsymbol{k^2}$, podczas gdy rozmiar liniowy powiększy się o ***k***. Oznacza to, że przy ustalonej masie moment bezwładności jest proporcjonalny do kwadratu wymiarów liniowych. W przypadku trójkąta, oznacza to proporcjonalność do $\boldsymbol{a^2}$, ale argument jest słuszny i dla innych przypadków. (Dla kuli lub walca tym charakterystycznym wymiarem jest promień ***R***, dla pręta jego długość ***l*** itp.).

Zatem

$$I \sim a^2.$$

Jeśli I ma być proporcjonalne do masy i do kwadratu boku, to musi być

$$I \sim ma^2 .$$

czyli

$$I = \alpha m a^2,$$

Gdzie α – współczynnik proporcjonalności niezależny już ani od masy, ani od boku.

(brak punktacji)

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Olimpiady Fizyczne XXV-XXVI"
Autor: A.Szymacha

Komitet Główny Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl