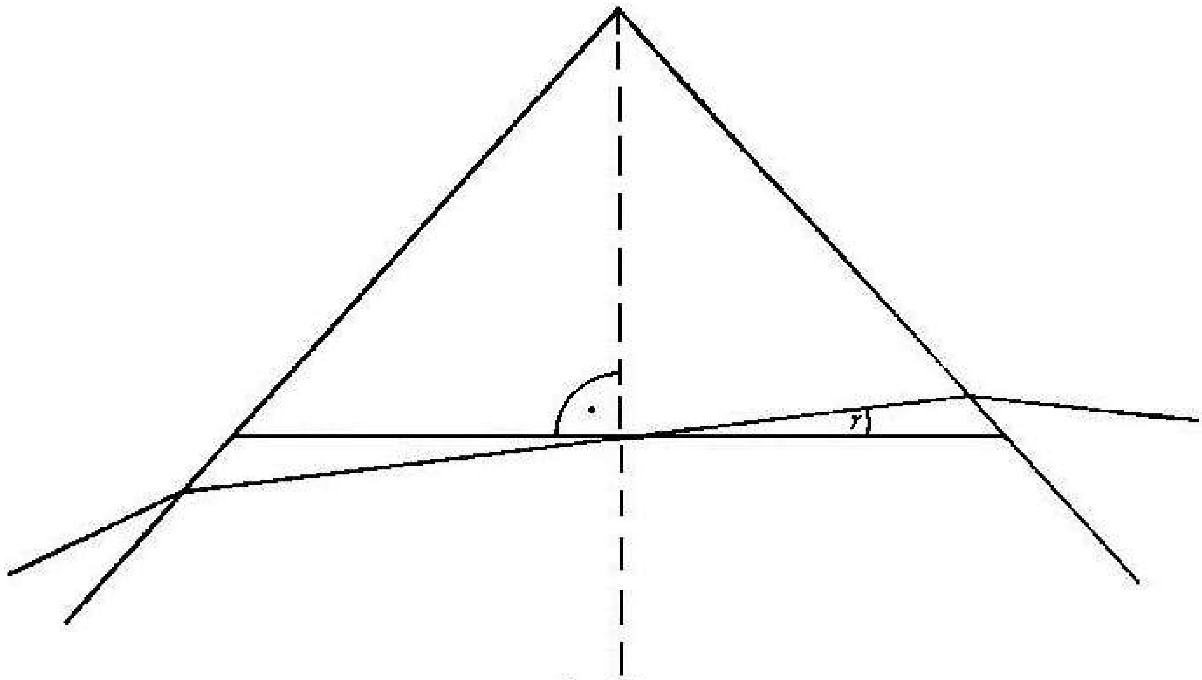
XXV OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP WSTĘPNY
Zadania teoretyczne

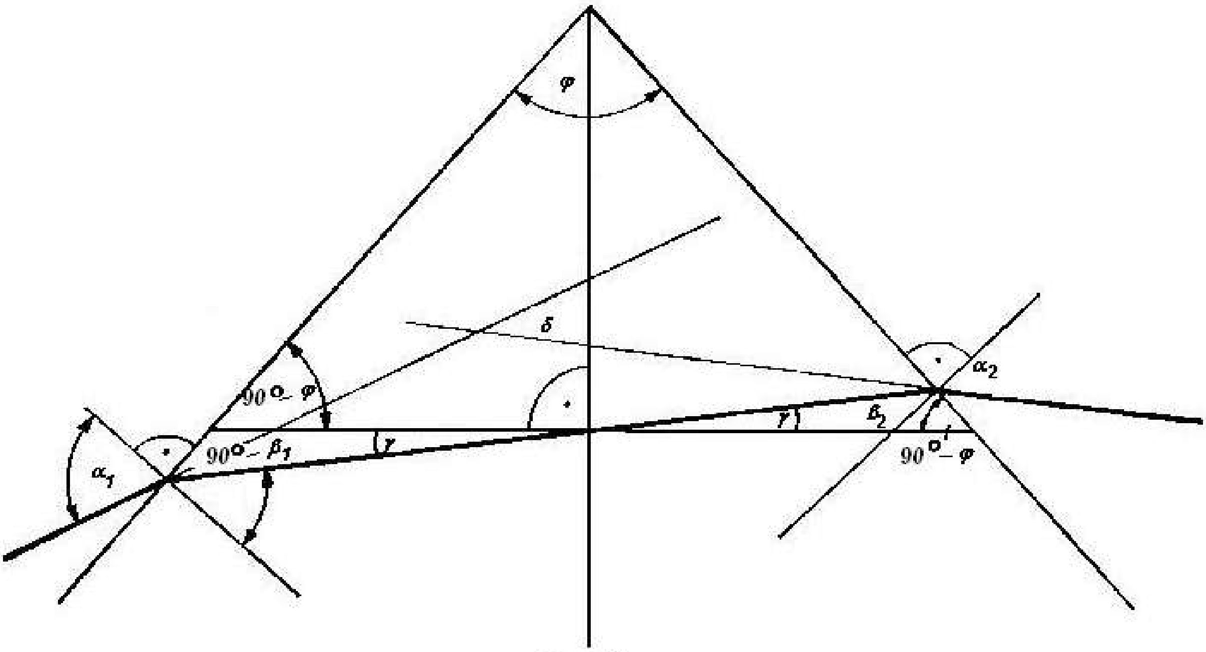
ZADANIE T3

Nazwa zadania „Pryzmat i huśtawka”

A) Wykaż, że kąt odchylenia promienia przechodzącego przez pryzmat pokazany na rysunku 12a ma wartość najmniejszą wtedy i tylko wtedy, gdy bieg promieniowania jest symetryczny względem dwusiecznej kąta łamiącego pryzmatu.



Rys. 12a



Rys. 12b

Wskazówka! Jako zmienną niezależną wybierz kąt γ pokazany na rysunku.

B) Wyjaśnij zjawiska fizyczne pozwalające samodzielnie rozhuśtać się na huśtawce.

ROZWIĄZANIE ZADANIA T3

A) Z rysunku 12b odczytujemy następujące zależności geometryczne:

$$90^o - \varphi = 90 - \beta_1 + \gamma,$$

(z twierdzenia o kącie zewnętrznym trójkąta)
czyli

$$\beta_1 = \varphi + \gamma. \tag{1}$$

Analogicznie

$$\beta_2 = \varphi - \gamma. \tag{2}$$

Przy pierwszym załamaniu promień odchyla się o kąt $\alpha_1 - \beta_1$, a przy drugim o kąt $\alpha_2 - \beta_2$. Całkowity kąt odchylenia wynosi zatem

$$\delta = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - (\beta_1 + \beta_2). \tag{3}$$

Z (1) i (2) mamy

$$\beta_1 + \beta_2 = 2\varphi. \tag{4}$$

Z (3) i (4) wynika

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\varphi. \tag{5}$$

Z prawa Snelliusa mamy

$$\sin\alpha_1 = n\sin\beta_1 = n\sin(\varphi + \gamma), \tag{6}$$

$$\sin\alpha_2 = n\sin\beta_2 = n\sin(\varphi - \gamma). \tag{7}$$

Różniczkując obie strony równań (6) i (7) po zmiennej γ dostajemy

$$\cos\alpha_1 \frac{d\alpha_1}{d\gamma} = n\cos(\varphi + \gamma), \tag{8}$$

$$\cos\alpha_2 \frac{d\alpha_2}{d\gamma} = -n\cos(\varphi - \gamma). \tag{9}$$

Dzieląc powyższe równania odpowiednio przez $\cos\alpha_1$ oraz $\cos\alpha_2$ i dodając stronami, dostaniemy

$$\frac{d\alpha_1}{d\gamma} + \frac{d\alpha_2}{d\gamma} = n\left[\frac{\cos(\varphi+\gamma)}{\cos\alpha_1} - \frac{\cos(\varphi-\gamma)}{\cos\alpha_2}\right]. \tag{10}$$

Równanie (5) po zróżniczkowaniu daje

$$\frac{d\delta}{d\gamma} = \frac{d\alpha_1}{d\gamma} + \frac{d\alpha_2}{d\gamma}. \tag{11}$$

Obliczyliśmy więc pochodną kąta odchylenia δ po parametrze γ

$$\frac{d\delta}{d\gamma} = n\left[\frac{\cos(\varphi+\gamma)}{\cos\alpha_1} - \frac{\cos(\varphi-\gamma)}{\cos\alpha_2}\right]. \tag{12}$$

Aby zbadać charakter zależności kąta odchylenia od parametru γ, musimy zbadać przebieg powyższej pochodnej. W tym celu przekształcimy wyrażenie (12) do wygodniejszej postaci. Pomnożymy mianowicie to wyrażenie i podzielimy przez sumę wyrazów w nawiasie kwadratowym. Powstanie w ten sposób w liczniku różnica kwadratów.

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta}{d\gamma} &= n\frac{\dfrac{\cos^2(\varphi+\gamma)}{\cos^2\alpha_1} - \dfrac{\cos^2(\varphi-\gamma)}{\cos^2\alpha_2}}{\dfrac{\cos(\varphi+\gamma)}{\cos\alpha_1} + \dfrac{\cos(\varphi-\gamma)}{\cos\alpha_2}} = \\
&= n\frac{\cos^2\alpha_2\cos^2(\varphi+\gamma) - \cos^2\alpha_1\cos^2(\varphi-\gamma)}{\cos\alpha_1\cos\alpha_2[\cos(\varphi+\gamma)\cos\alpha_2 + \cos(\varphi-\gamma)\cos\alpha_1]} = \\
&= n\frac{(1-\sin^2\alpha_2)\cos^2(\varphi+\gamma) - (1-\sin^2\alpha_1)\cos^2(\varphi-\gamma)}{\cos\alpha_1\cos\alpha_2(\cos\alpha_2\cos\beta_1 + \cos\alpha_1\cos\beta_2)}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Istotne jest, że w całym zakresie zależności kątów α_1, β_1, α_2, β_2 mianownik jest zawsze różny od zera i dodatni (kąt padania i złamania są kątami ostrymi). Zatem znak pochodnej jest całkowicie określony przez znak licznika wyrażenia (13). Oznaczmy ten licznik literą L. Wyrażając $\sin^2\alpha_1$ i $\sin^2\alpha_2$ przez kąt γ, z prawa Snelliusa (wzory (6) i (7)) mamy

$$
\begin{aligned}
L &= \cos^2(\varphi+\gamma) - n^2\sin^2(\varphi-\gamma)\cos^2(\varphi+\gamma) - \\
&- \cos^2(\varphi-\gamma) + n^2\sin^2(\varphi+\gamma)\cos^2(\varphi-\gamma) = \\
&= [\cos(\varphi+\gamma)-\cos(\varphi-\gamma)][\cos(\varphi+\gamma)+\cos(\varphi-\gamma)] + \\
&+ n^2[\sin(\varphi+\gamma)\cos(\varphi-\gamma) - \sin(\varphi-\gamma)\cos(\varphi+\gamma)]\times \\
&\times[\sin(\varphi+\gamma)\cos(\varphi-\gamma) + \sin(\varphi-\gamma)\cos(\varphi+\gamma)].
\end{aligned}
$$

Przekształcamy dalej korzystając ze znanych wzorów trygonometrycznych na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych.

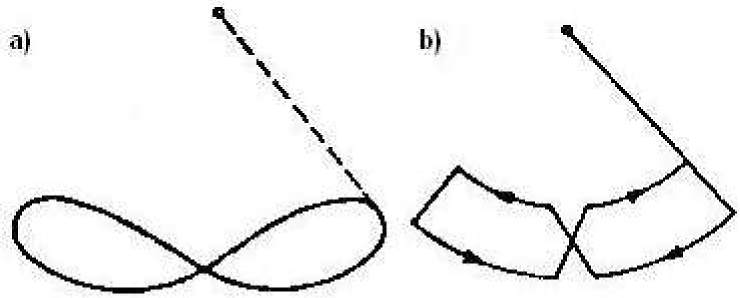
$$
\begin{aligned}
L &= -2\sin\varphi\sin\gamma\cdot 2\cos\varphi\cos\gamma + n^2\sin[(\varphi+\gamma)-(\varphi-\gamma)]\times \\
&\times\sin[(\varphi+\gamma)+(\varphi-\gamma)] = (n^2-1)\sin 2\varphi\cdot\sin 2\gamma.
\end{aligned}
$$

Ostatecznie

$$
\frac{d\delta}{d\gamma} = \frac{n(n^2-1)\sin 2\varphi}{\cos\alpha_1\cos\alpha_2[\cos\alpha_2\cos\beta_1 + \cos\alpha_1\cos\beta_2]}\sin 2\gamma. \tag{14}
$$

Z wzoru powyższego wynika, że dla $\gamma < 0$ funkcja δ jest malejącą funkcją γ, a dla $\gamma > 0$ jest funkcją rosnącą. Funkcja ta ma zatem minimum dla $\gamma = 0$ i jest to jedyne minimum tej funkcji, c.b.d.o.

B) Drogę środka ciężkości człowieka huśtającego się na huśtawce przedstawia rysunek 13. Rysunek 13a przedstawia rzeczywistą drogę środka ciężkości, a rysunek 13b uproszczony jego przebieg, łatwiejszy do dyskusji. W układzie nieinercjalnym związanym sztywno z huśtawką działa na każdą część ciała człowieka siła bezwładności (odśrodkowa oraz tzw. siła Coriolisa).



Rys. 13

Rozważmy problem z punktu widzenia bilansu energii. Siłę Coriolisa jako prostopadłą do prędkości możemy przy tym zaniedbać. Przesuwając symetrycznie środek ciężkości (przez podkurczenie, a następnie prostowanie nóg) człowiek wykonuje przy przysuwaniu do siebie nóg pracę, natomiast przy odsuwaniu nóg praca jest nad człowiekiem wykonywana. Rzecz w tym, że w czasie wahań zmienia się prędkość kątowa, a tym samym siła odśrodkowa. W położeniach bliskich skrajnym jest ona niewielka, wartość siły odśrodkowej jest duża. Zatem praca wykonana przez człowieka blisko położenia równowagi jest dużo większa do pracy wykonanej przez układ nad człowiekiem w położeniach skrajnych. Bilans netto jest taki, że w czasie jednego cyklu mięśnie człowieka wykonują pracę nad układem. Jeżeli praca ta jest większa do straty narcie i opór powietrza, to amplituda drgań wzrasta do dużych wartości. Przy odpowiednio dużych amplitudach i prędkościach, opory na jeden cykl wzrastają do wartości równoważącej wykonywaną pracę i ustala się pewien stabilny stan wahań.

Opisane zjawisko jest przykładem szerszej klasy, zwanej rezonansem paramagnetycznym. Jeśli układ, mogący wykonywać drgania własne (huśtawka, obwód elektryczny itp.) o określonej częstości, zmienia periodycznie któryś ze swoich parametrów z częstością dwa razy większą do częstości drgań własnych, to w układzie to w układzie pojawiają się drgania o amplitudzie rosnącej szybko z czasem. Człowiek na huśtawce zmienia efektywną długość wahadła, jakie stanowi on wraz z huśtawką.

Zauważymy, że okres drgań tej długości jest dwa razy krótszy od okresu wahań samej huśtawki. Środek ciężkości w samym punkcie ruchu do i od osi obrotu przechodzi przez odległość średnią cztery razy w ciągu jednego okresu wahań, podczas gdy sama huśtawka przechodzi w tym samym czasie przez położenie najniższe tylko dwa razy.

(brak punktacji)

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Olimpiady Fizyczne XXV-XXVI”
Autor: A.Szymacha

Komitet Główny Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl