XXVI OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP III
Zadanie teoretyczne

ZADANIE T2

Nazwa zadania: „Promieniowanie we wnęce"

We wnęce o objętości V i stałej temperaturze znajduje się promieniowanie o energii całkowitej E. Między promieniowaniem a ściankami wnęki panuje stan równowagi. Jaki związek spełniają wielkości V, E i ciśnienie promieniowania na ścianki p?

ROZWIĄZANIE ZADANIA T2

Promieniowanie we wnęce stanowi układ poruszających się we wszystkie strony fotonów o różnych częstościach danych przez rozkład słuszny dla ciała doskonale czarnego. Weźmy pod uwagę fotony o określonej częstości υ. Energia każdego z takich fotonów wynosi $E=h\upsilon$, a pęd $\pi\upsilon=h\upsilon/c$, gdzie c oznacza prędkość światła. W stanie równowagi każdemu fotonowi o pędzie π, pochłoniętemu przez jakiś punkt ścianki odpowiada emisja z tego punktu ścianki fotonu o pędzie π_υ. Odpowiada temu zmiana pędu ścianki o $2\pi\upsilon$.

Rozpatrzmy foton o pędzie $\pi_\upsilon=h\upsilon/c$. Niech foton pada na ściankę po kątem Θ. Składowa pędu rozważanego fotonu w kierunku prostopadłym do ścianki wynosi więc $\pi_X(\Theta)=\pi_\upsilon\cos\Theta$.. Niech liczba takich fotonów w jednostce objętości wynosi n_Θ. W czasie $\Delta\tau$ do elementu ścianki o powierzchni ΔS dotrze $n_\Theta\,\Delta\tau c\Delta S\cos\Theta$ fotonów. Każdy z nich przekazuje ściance pęd $2\pi_\upsilon\cos\Theta$. Całkowita zmiana pędu ścianki, pochodząca od rozważanych fotonów, wynosi więc

$$\Delta\Pi_\upsilon^- = 2n_\Theta\Delta\tau c\Delta S\pi_\upsilon\cos^2\Theta$$

czyli

$$\Delta\Pi_\upsilon = \frac{2\Delta\tau c\Delta S}{\pi_\upsilon}n_\Theta\pi_x^2$$

Stąd

$$\frac{\Delta\Pi_\upsilon}{\Delta\tau} = \frac{2c\Delta S}{\pi_\upsilon}n_\Theta\pi_x^2$$

Liczba fotonów o tej samej o tej samej wielkości π_χ^2(uwzględniając dwa możliwe znaki) wynosi

$$n\pi_x^2 = 2n_\Theta$$

Zatem

$$\frac{\Delta\Pi_\upsilon}{\Delta\tau} = \frac{c\Delta S}{\pi_\upsilon}n_{\pi x^2}\pi_x^2$$

$\frac{\Delta\Pi_\upsilon}{\Delta\tau}$ jest siłą ΔF_υ wywierana przez rozpatrywane fotony na powierzchni ΔS. Oznaczając ciśnienie pochodzące od tych fotonów przez p_υ., możemy napisać

$$p_\upsilon = \frac{\Delta F_\upsilon^-}{\Delta S} = \frac{c}{\pi_\upsilon}n_{\pi x^2}\pi_x^2$$

Ciśnienie PV pochodzące od wszystkich fotonów o częstości υ, niezależnie od tego pod jakim kątem one padają, otrzymujemy przez zsumowanie ciśnień pu. Uwzględniając, że wszystkie kierunki są równo uprawnione, dostajemy

$$P_\upsilon = \sum p_\upsilon = \frac{c}{\pi_\upsilon} \sum n_{\pi x^2} \pi_x^2 = \frac{c}{\pi_\upsilon} n_{\pi x^2} \bar{\pi}_x^{\,2} = \frac{1}{3}\frac{c}{\pi_\upsilon} n_\upsilon \pi_\upsilon^2 = \frac{1}{3} c n_\upsilon \pi_\upsilon = \frac{1}{3} n_\upsilon h\upsilon = \frac{1}{3} E_\upsilon / V$$

gdzie: n oznacza liczbę fotonów o częstości υ w jednostce objętości , π_X^2- średni kwadrat składowej pędu fotonu o częstości υ w kierunku ścianki, E_υ - energię wszystkich fotonów o częstości υ, a V - objętość wnęki.

Mamy więc:

$$P_\upsilon = \frac{1}{3}\frac{E_\upsilon}{V}$$

Sumując obie strony tej zależności po wszystkich υ otrzymujemy

$$p_\upsilon = \frac{1}{3}\frac{E_\upsilon}{V} \left(\sum_\upsilon p_\upsilon = p; \sum_\upsilon E_\upsilon = E\right)$$

co kończy rozważania.

Najpoważniejszym błędem (dyskwalifikującym rozwiązanie) było traktowanie fotonów jako cząstek klasycznych o różnej od zera masie i o prędkości różnej niż c. Błąd ten popełniło ponad 50% zawodników. Z innych błędów można wymienić ograniczenie się do rozważania tylko jednej częstości, ograniczenie się tylko do fotonów padających prostopadle, omyłki rachunkowe oraz uzależnienie rozważań od konkretnego kształtu wnęki. Warto zwrócić uwagę, że rozważanie przytoczone wyżej nie odwołują się ani do rozkładu Plancka ani też do jakiegoś specyficznego kształtu ścianek tworzących wnękę.

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl