XXVI OLIMPIADA FIZYCZNA
(1976/1977)
STOPIEŃ WSTĘPNY

Nazwa – Wyznaczanie współczynnika tarcia statycznego krążka o stół.

Źródła – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej
– Andrzej Szymacha: *Olimpiady fizyczne XXV i XXVI.* WSiP, Warszawa 1980
– Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki: *Olimpiada fizyczna. Wybrane zadania doświadczalne z rozwiązaniami.* Stowarzyszenie *Symetria i Własności Strukturalne*, Poznań 1994 (zad. 4)
– T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Mając do dyspozycji:

- jednorodną, poziomą powierzchnię stołu,
- płaski jednorodny krążek lub klocek z uchwytem w środku ciężkości,
- dynamometr[1],
- nitkę,
- statyw,
- papier milimetrowy,
- przyrządy geometryczne,

wyznacz współczynnik tarcia statycznego krążka o stół w warunkach, gdy ciężar krążka nieco przekracza zakres dynamometru. Uzasadnij metodę pomiaru. Oszacuj błąd pomiaru[2] wyniku. Opisz wykonanie czynności.

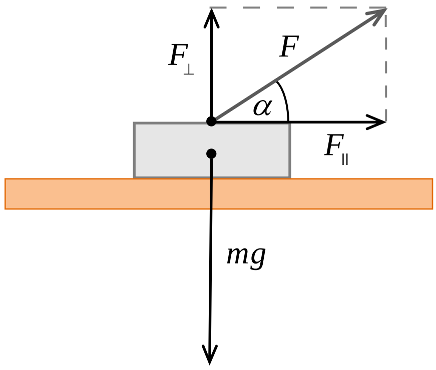
[1]Dynamometr – przyrząd do pomiaru siły; nazwa pochodzi od jednostki siły w układzie jednostek CGS (centymetr, gram, sekunda); po wprowadzeniu układu jednostek SI w Polsce w grudniu 1966 r., upowszechniła się nazwa „siłomierz" (przyp. red.).

[2]Błąd pomiaru – określenie było stosowane w znaczeniu obecnej niepewności natomiast „błąd maksymalny" – niepewności granicznej.
Problematykę tą od 1993 r. reguluje *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, u nas w nauczaniu od 2018 r. *Rekomendacja Polskiego Towarzystwa Fizycznego dotycząca nauczania o opracowywaniu wyników pomiarów w szkołach* – www2022.ptf.net.pl/programy/edukacja/rekomendacja (przyp. red.).

Rozwiązanie zadania D1 – XXVI OF, stopień wstępny

Wyznaczamy zależność siły F potrzebnej do poruszania krążka w zależności od kąta α, jaki tworzy kierunek siły F z płaszczyzną stołu (rys. 1). Znajdujemy kąt $\alpha_{\min}$, przy którym siła ta jest najmniejsza. Szukany współczynnik tarcia jest równy $\operatorname{tg}\alpha_{\min}$. Przy teoretycznym uzasadnieniu tego faktu należy zwrócić uwagę na to, że ciągnąć krążek pod kątem różnym od zera zmniejszamy jednocześnie jego nacisk na stół.

Ponieważ ciężar krążka przekracza zakres siłomierza, odpada najprostszy możliwy sposób polegający na wyznaczeniu najpierw ciężaru, a następnie minimalnej siły poziomej wystarczającej do ruszenia klocka z miejsca. Jeśli się chwilę zastanowimy, to zauważymy że ciągnięcie klocka siłą przyłożoną poziomo i siłą przyłożoną pionowo, są dwoma skrajnymi sposobami ruszenia go z miejsca. Można również badać siłę potrzebną do poruszenia klocka, jeśli jest ona skierowana pod pewnym kątem do poziomu (rys. 1).



Rys. 1[3]

Siłę tę łatwo obliczymy. Jej składowa pionowa $F_\perp = F\sin\alpha$ zmniejsza nacisk, który staje się równy

$$N = mg - F\sin\alpha. \tag{1}$$

Żeby ruszyć klocek z miejsca, składowa pozioma $F_\parallel = F\cos\alpha$ musi być równa co najmniej fN, gdzie f to współczynnik tarcia

$$F\cos\alpha = (mg - F\sin\alpha)f. \tag{2}$$

Zależność F od α dostajemy rozwiązując powyższe równanie względem F:

$$F = \frac{fmg}{\cos\alpha + f\sin\alpha}. \tag{3}$$

Zależność funkcji $F(\alpha)$ wygodnie jest przekształcić do innej postaci wprowadzając kąt β taki, że

$$\operatorname{tg}\beta = f, \tag{4}$$

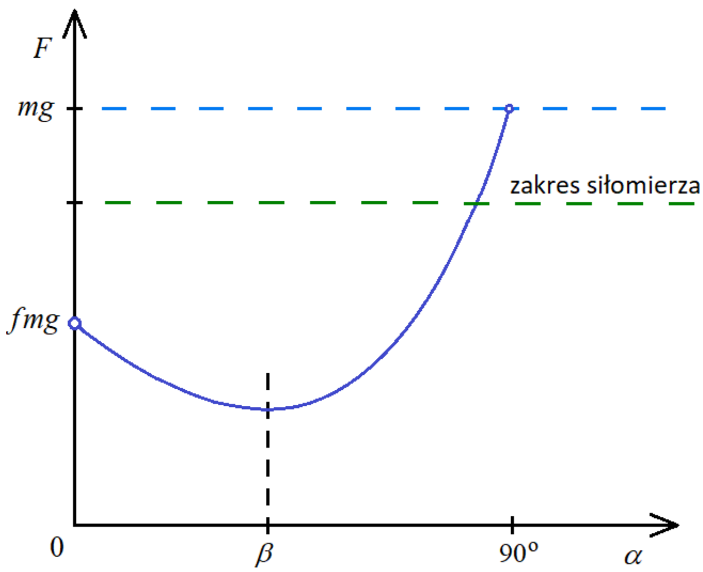
$$F = \frac{mg\operatorname{tg}\beta}{\cos\alpha + \sin\alpha\operatorname{tg}\beta}. \tag{5}$$

Mnożąc licznik i mianownik przez $\cos\beta$ i korzystając ze wzoru $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$, mamy ostatecznie

[3] W źródłach rys. były czarno-białe. Podczas opracowania zadania rys. zostały „pokolorowane” (przyp. red.).

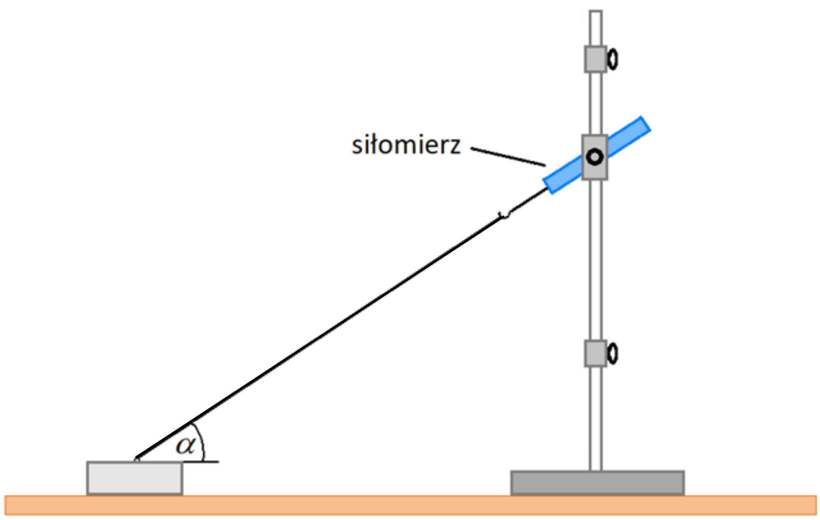
$$F = \frac{mg\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}. \tag{6}$$

Ze wzoru tego widać, że F ma najmniejszą wartość gdy mianownik we wzorze (6) jest największy, a więc wtedy, gdy $\cos(\alpha - \beta) = 1$, czyli dla $\alpha = \beta$. Najmniejszą wartość $F(\alpha)$ można znaleźć wykonując wykres funkcji F od α – rys. 2. W minimum kąt $\alpha = \beta$, wówczas $f = \operatorname{tg}\alpha_{\min}$.



Rys. 2[4]

Zestaw doświadczalny montujemy według rys. 3. Na blacie stołu stawiamy krążek i statyw. Uchwyt na środku krążka łączymy nitką z siłomierzem, który jest zamocowany w uchwycie do statywu. Uchwyt ma możliwość regulacji kąta nachylenia siłomierza. Kąt nachylenia siłomierza do poziomu jest kątem α o ile nitka jest naciągnięta. Ciągnąc delikatnie za statyw obserwujemy wskazanie siłomierza, przy którym klocek ruszy z miejsca.

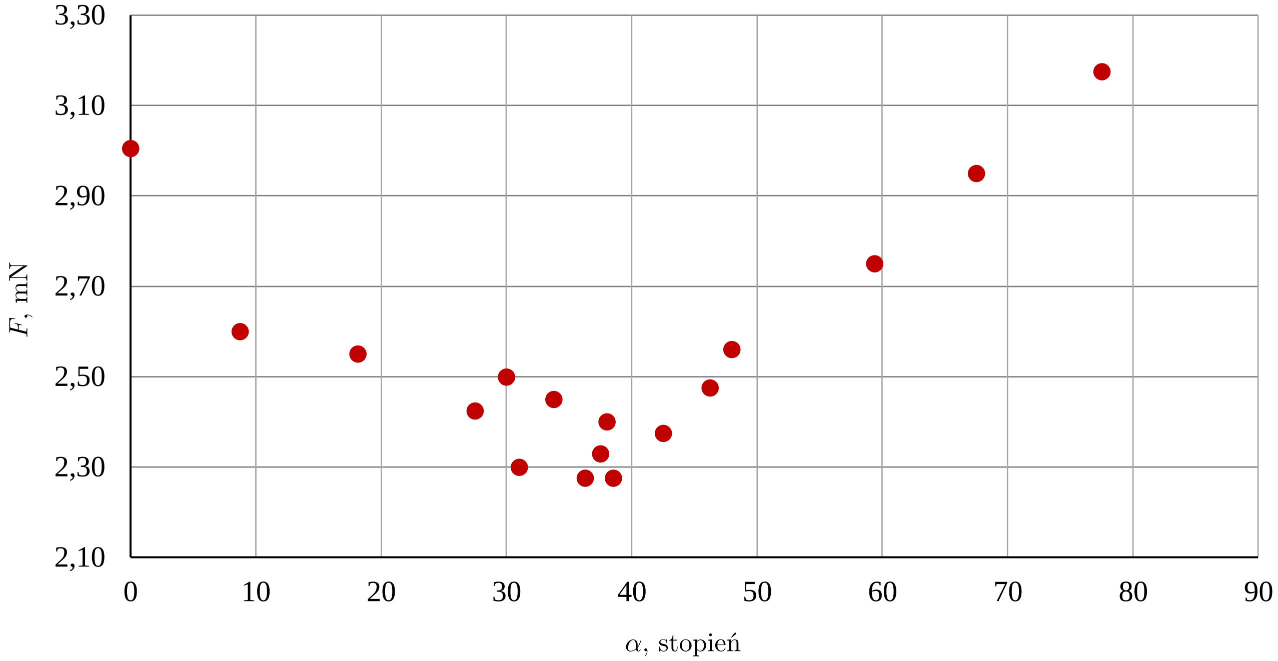


Rys. 3[5]

[4]Rys. wykonano korzystając z rysunku zamieszczonego jedynie w drugim źródle (A. Szymacha) (przyp. red.).
[5]Rys. wykonano korzystając z rysunku zamieszczonego jedynie w trzecim źródle (W.G. i A.K.) (przyp. red.).

Następnie sporządzamy wykres $F(\alpha)$ w zakresie od $0°$ do pewnego kąta maksymalnego wyznaczonego przez zakres siłomierza i z wykresu odczytujemy, jakiemu kątowi $\alpha_{\min}$ odpowiada minimum funkcji. Zgodnie z przeprowadzoną dyskusją współczynnik tarcia f jest równy tangensowi tego kąta.

Przykładowe wyniki uzyskane dla krążka stalowego przedstawia rys. 4. Widać, że obserwowane minimum jest bardzo rozmyte i płytkie. Wykreślona wartość siły jest średnią z pięciu pomiarów wykonanych dla każdego kąta. Z wykresu odczytany kąt $\alpha = 35°$ a $\Delta\alpha = 5°$, stąd $f = 0,70$; natomiast $\Delta f = (\operatorname{tg} 40° - \operatorname{tg} 30°)/2 = 0,13$.



Rys. 4[6]

Metoda ta jest jednak bardzo niedokładna. Jeśli mamy punkty doświadczalne, które obarczone są przecież pewnym błędem przypadkowym, bardzo trudno jest zdecydować się patrząc na wykres, gdzie naprawdę leży minimum. Związane jest to z tym, że zmiana wartości funkcji w pobliżu minimum jest bardzo niewielka. Konkretnie w naszym przykładzie, w którym mierzona wartość F jest odwrotnie proporcjonalna do $\cos(\alpha - \beta)$, w dziesięciostopniowym przedziale kątów α od $\alpha = \beta - 5°$ do $\alpha = \beta + 5°$ $\cos(\alpha - \beta)$ zmienia się tylko o $0,4\%$. Pomiar siły za pomocą siłomierza szkolnego jest i tak dużo mniej dokładny. Zatem w praktyce można powiedzieć, że siła F w takim (a tym bardziej w mniejszym) przedziale kąta jest stała i równa $F_{\min}$. Nasuwa się więc następujący sposób poprawienia dokładności. W pierwszej serii pomiarów ustalamy kąt $\alpha_{\min}$ obarczony dość dużą niepewnością pomiarową, powiedzmy $5°$. Następnie przy ustalonym kącie α bliskim kątowi β z taką dokładnością, na jaką nas stać, mierzymy wielokrotnie siłę F, a następnie obliczamy średnią. Przyjmujemy, że ta wartość średnia równa się naprawdę $F_{\min}$. Powyższy pomiar obarczony jest błędem statystycznym[7] wynikającym z rozrzutu wyników i błędem systematycznym związanym z tym, że ustalony kąt nie jest dokładnie równy β. W warunkach zadania ta ostatnia niepewność pomiarowa jest jednak do zaniedbania. Następnie możliwie najdokładniej wyznaczamy F_0. I dopiero teraz wyznaczamy współczynnik tarcia na podstawie tych dwóch wartości.

[6]Wykres bazuje na wykresie zamieszczonym jedynie w trzecim źródle (W.G. i A.K.) (przyp. red.).
[7]Zob. przyp. 2.

Mamy bowiem

$$F_0 = mg \operatorname{tg} \beta, \tag{7}$$

$$F_{\min} = mg \sin \beta, \tag{8}$$

stąd

$$\cos \beta = \frac{F_{\min}}{F_0} \tag{9}$$

i ostatecznie:

$$f = \operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{F_{\min}}{F_0}\right)^2}}{\frac{F_{\min}}{F_0}} = \frac{\sqrt{F_0^2 - F_{\min}^2}}{F_{\min}}. \tag{10}$$

Zapamiętajmy, wyznaczając doświadczalnie ekstremum jakiejś funkcji, że o wiele łatwiej i dokładniej można zmierzyć ekstremalną wartość funkcji (wartość funkcji w ekstremum), niż położenie tego ekstremum. Dlatego wyznaczenie wartości współczynnika tarcia statycznego f na podstawie wzoru (10) jest o wiele dokładniejsze niż jego wyznaczenie z danych pomiarowych bazujących na wzorze

$$f = \operatorname{tg} \alpha_{\min},$$

z którego korzystaliśmy w pierwszej metodzie.