XXVI OLIMPIADA FIZYCZNA (1976/1977). Stopień wstępny, zad. teoretyczne – T3-C.

Źródło: „Fizyka w Szkole” 77/78 r.

Autor: Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki

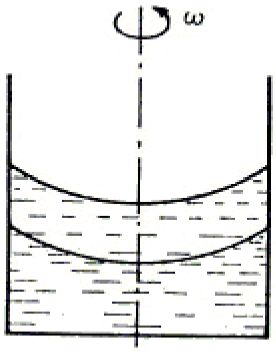
Nazwa zadania: Ciecze o różnych gęstościach.

Działy: Hydrostatyka

Słowa kluczowe: przyleganie, naczynie walcowate, ciecze o różnych gęstościach

Zadanie teoretyczne - T3, zawody wstępnego stopnia, XXVI OF.

W walcowatym naczyniu znajdują się dwie różne, nie mieszające się ciecze o różnych gęstościach. Po ustawieniu naczynia na środku obracającej się płyty powierzchnie cieczy przybrały kształt wklęsły (rys. 1).
Czy powierzchnie obu cieczy są przystające? Napięcie powierzchniowe i przyleganie zaniedbujemy.



rys. 1

Rozwiązanie

I znów zadanie wygodnie jest rozwiązać w wirującym układzie odniesienia. Ponieważ badamy stan równowagi (w tym układzie), siły Coriolisa są nieistotne i wystarczy ograniczyć się do siły odśrodkowej. Siła ta (przy ustalonej częstości obrotu) jest wprost proporcjonalna do odległości od osi. „Energia potencjalna" związana z tą siłą może być obliczona identycznie jak w przypadku sprężyny, gdzie siła jest też proporcjonalna do wychylenia, tyle że skierowana do centrum.

Ponieważ siła odśrodkowa

$$F = m\omega^2 r \tag{1}$$

gdzie r — odległość od osi obrotu, więc „energia potencjalna" tej siły

$$F = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

(2)

Na każdą cząsteczkę cieczy o masie m działa także siła ciężkości o energii potencjalnej

$$U_{gr} = mgh$$

(3)

gdzie h wysokość liczona na przykład od dna naczynia.
Łączna energia potencjalna sił zewnętrznych

$$F = m\left(gh - \frac{1}{2}\omega^2 r^2\right) \quad (4)$$

Powierzchnie ekwipotencjalne opisane są równaniem

$$m\left(gh - \frac{1}{2}\omega^2 r^2\right) = c' = const \quad (5)$$

czyli

$$h = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g} r^2 + c \quad (6)$$

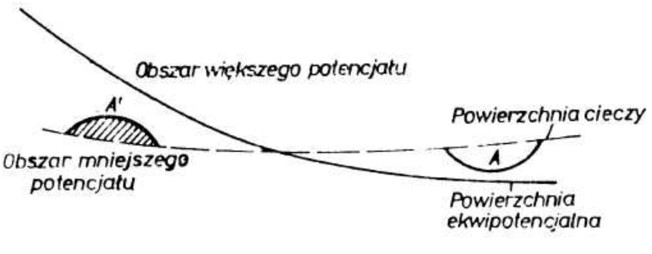
Gdzie:

$$c = \frac{c'}{mg}$$

jest znów dowolną stałą.

Równanie (6) opisuje rodzinę paraboloid obrotowych o identycznym kształcie, różniących się jedynie odległością wierzchołka od dna naczynia.

Jest rzeczą niemal oczywistą, że zarówno swobodna powierzchnia cieczy w takim wirującym naczyniu, jak też powierzchnia rozdziału między dwiema nie mieszającymi się cieczami powinny być w stanie równowagi powierzchniami ekwipotencjalnymi. Dla powierzchni swobodnej dowód jest natychmiastowy.
Załóżmy coś przeciwnego, to znaczy że powierzchnia cieczy nie pokrywa się z powierzchnią ekwipotencjalną, jak to pokazuje rysunek 2. Stan taki nie jest na pewno stanem o najniższej energii, gdyż objętość cieczy A przechodząc w położenie A' zmniejsza energię potencjalną. Wyzwala się energia



rys. 2

kinetyczna. Gdyby rzeczywiście zmusić ciecz, by w jakiejś chwili miała powierzchnię różną od ekwipotencjalnej, to zacznie ona płynąć, drgać, aż wreszcie po wytłumieniu ruchów (wskutek zawsze istniejących oporów) zajmie ona położenie zgodne z powierzchnią ekwipotencjalną. Dowód, że powierzchnia graniczna dwóch różnych cieczy (o różnych gęstościach) musi w stanie równowagi też być powierzchnią ekwipotencjalną, jest niewiele bardziej złożony. Możemy nawet posłużyć się poprzednim rysunkiem wyobrażając sobie, że obszar nad rozpatrywaną cieczą wypełniony jest inną, lżejszą cieczą, której swobodna powierzchnia leży gdzieś wyżej. Jedyna różnica polega teraz na tym, że przy przemieszczeniu obszaru A w położenie A' taka sama objętość cieczy (o mniejszej gęstości, a więc o mniejszej masie) musi ustąpić miejsca naszej cieczy i wejść w obszar podwyższonego potencjału.

Ale energia potencjalna jest w naszym przypadku proporcjonalna do masy, zatem podwyższenie energii potencjalnej związane z przemieszczeniem lżejszej cieczy jest mniejsze niż obniżenie związane z przemieszczeniem cieczy o większej gęstości. A zatem i w tym przypadku minimum energii całkowitej może być osiągnięte tylko wtedy, gdy powierzchnia rozdziału jest powierzchnią ekwipotencjalną.

Ostatecznie dochodzimy do wniosku, że obie powierzchnie, o których mowa w zadaniu, są powierzchniami ekwipotencjalnymi, a zatem — jak wykazaliśmy wcześniej — są one przystające (jedna powstaje przez równoległe przesunięcie drugiej). Innymi słowy w każdym punkcie odległość między tymi powierzchniami mierzona wzdłuż pionu jest stała.