

# XXVII OLIMPIADA FIZYCZNA

(1977/1978)

## ZAWODY I STOPNIA

### Zadanie doświadczalne – D2

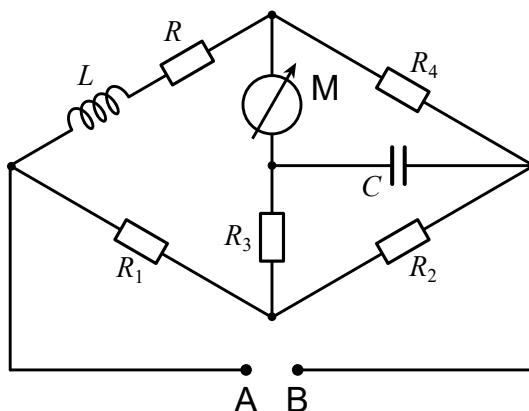
**Nazwa** – Wyznaczanie oporu i indukcyjności uzwojenia pierwotnego transformatora.

**Źródła** – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej

- Waldemar Gorzkowski<sup>1</sup>, Andrzej Kotlicki<sup>2</sup>: *Fizyka w Szkole* nr 4, 1978, s. 160–167
- Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki: *Olimpiada Fizyczna XXVII–XXVIII*, WSiP, Warszawa 1983, s. 35–39
- Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki: *Olimpiada fizyczna. Wybrane zadania doświadczalne z rozwiązaniami*. Poznań, Stowarzyszenie *Symetria i Własności Strukturalne*, 1994, zad. 38, s. 44–45, 145–148
- T.M. Molenda, IF US, [www.OF.szc.pl](http://www.OF.szc.pl).

Wykaż, że jeżeli wartość oporów  $R$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  oraz pojemność  $C$  są tak dobrane, że przez miernik  $M$  (rys. 1) nie płynie prąd niezależnie od tego, czy do  $AB$  jest włączone źródło napięcia stałego, czy zmiennego, to

$$L = C \frac{R_4}{R} (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1).$$



Rys. 1

Następnie, korzystając z powyższego wyniku oraz zestawu przyrządów podanego niżej, wyznacz opór omowy  $R$  oraz indukcyjność  $L$  cewki uzwojenia pierwotnego transformatora głośnikowego. Opisz dokładnie wykonanie doświadczenia. Oszacuj błąd wyniku<sup>3</sup>.

Zestaw przyrządów:

- a) 2 opory stałe o znanych wartościach,
- b) 2 opornice dekadowe,
- c) miernik uniwersalny (amperomierz prądu stałego i zmiennego),
- d) kondensator o znanej wartości,
- e) źródło prądu stałego (baterijka),
- f) źródło prądu zmiennego (transformator dzwonekowy),
- g) kable połączeniowe.

**UWAGA:** Zadanie to jest trudniejsze niż zadanie poprzednie. (D1 – przyp. red.)

---

<sup>1</sup>Dr Waldemar Gorzkowski był wieloletnim sekretarzem naukowym ds. zadań w KGOF (XIX–XXXVII OF, z przerwą od połowy XXX OF do końca XXXI OF), bardzo zasłużony dla naszej olimpiady fizycznej jak i międzynarodowej, gdzie od 1983 r., pełnił funkcję Sekretarza Generalnego, później przemianowaną na funkcję prezesa, którą sprawował do śmierci w 2007 r. ([www.kgof.edu.pl/50MOF/historia.php](http://www.kgof.edu.pl/50MOF/historia.php)); prowadził również międzynarodowy konkurs prac uczniowskich *First Step to Nobel Prize in Physics*. Za osiągnięcia został uhonorowany *Nagrodą Polskiego Towarzystwa Fizycznego im. Krzysztofa Ernsta za Popularyzację Fizyki*. (przyp. red.)

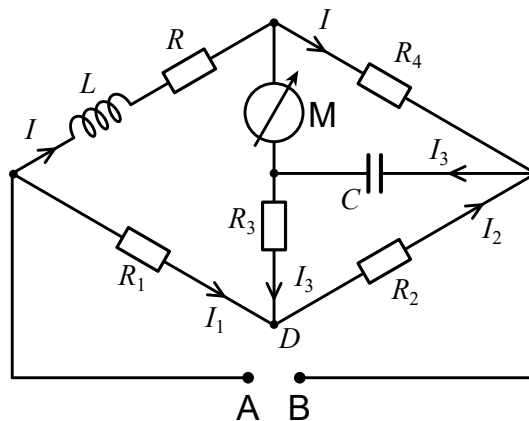
<sup>2</sup>Andrzej Kotlicki (wówczas dr) był kierownikiem organizacyjnym w KGOF, od XXV OF do XXXVII OF, w tym okresie był współautorem artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF i ww. książek z zadaniami. W latach 1984–1999 był sekretarzem Międzynarodowej Olimpiady Fizycznej (Od 1991 r. – prof. University of British Columbia). (przyp. red.)

<sup>3</sup>Błąd pomiaru – określenie było stosowane w znaczeniu obecnej niepewności pomiaru, a „błąd maksymalny” – niepewności granicznej. Problematykę tą od 1993 r. reguluje *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, u nas w nauczaniu od 2018 r. *Rekomendacja Polskiego Towarzystwa Fizycznego dotycząca nauczania o opracowywaniu wyników pomiarów w szkołach* – [www.2022.ptf.net.pl/programy/edukacja/rekomendacja](http://www.2022.ptf.net.pl/programy/edukacja/rekomendacja). (przyp. red.)

## Rozwiązanie zadania D – XXVII OF, I stopień

### Część teoretyczna

Metoda I polega na rozwiązaniu równań Kirchhoffa dla podanego obwodu, przy założeniu, że przez miernik nie płynie prąd. Kierunki prądów przyjmujemy jak na rysunku 2.



Rys. 2

Z pierwszego prawa Kirchhoffa dla węzła D:

$$I_1 + I_3 = I_2. \quad (1)$$

Dla lewego trójkąta:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + R_3 I_3 - R_1 I_1 = 0. \quad (2)$$

Dla górnego trójkąta po prawej stronie:

$$R_4 I + \frac{1}{C} \int_0^t I_3 dt = 0. \quad (3)$$

Zakładamy, że początkowy ładunek na kondensatorze jest równy zero. Zawsze można to osiągnąć zwierając kondensator przed pomiarem.

Dla trójkąta dolnego po prawej stronie:

$$\frac{1}{C} \int_0^t I_3 dt + R_3 I_3 + R_2 I_2 = 0. \quad (4)$$

Z warunku, że  $E = \text{const.}$  przez M nie płynie prąd, wynika:

$$R_1 R_4 - R R_2 = 0. \quad (5)$$

Podstawiamy  $I_2$  z równania (1) do równania (4). Razem z (2) i (3) otrzymamy układ równań:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + R_3 I_3 - R_1 I_1 = 0, \quad (a)$$

$$R_4 I + \frac{1}{C} \int_0^t I_3 dt = 0, \quad (b)$$

$$\frac{1}{C} \int_0^t I_3 dt + R_3 I_3 + R_2 I_1 + R_2 I_3 = 0 \quad (c)$$

z warunkiem (5).

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że otrzymany układ równań całkowo-różniczkowych jest trudny do rozwiązania na poziomie szkolnym. Okazuje się jednak, że wszystko, co trzeba, da się tu policzyć. Mamy bowiem z (3):

$$I = -\frac{1}{CR_4} \int_0^t I_3 dt,$$

zatem na podstawie (2) otrzymujemy:

$$-\frac{L}{CR_4} I_3 - \frac{R}{CR_4} \int_0^t I_3 dt + R_3 I_3 - R_1 I_1 = 0,$$

$$\frac{1}{C} \int_0^t I_3 dt + R_3 I_3 + R_2 I_1 + R_2 I_3 = 0.$$

Z drugiego z tych równań wyznaczamy  $I_1$ :

$$I_1 = -\frac{1}{CR_2} \int_0^t I_3 dt - \frac{R_3}{R_2} I_3 - I_3$$

i wstawiamy do równania pierwszego:

$$-\frac{L}{CR_4} I_3 - \frac{R}{CR_4} \int_0^t I_3 dt + R_3 I_3 + \frac{R_1}{CR_2} \int_0^t I_3 dt + \frac{R_1 R_3}{R_2} I_3 + R_1 I_3 = 0.$$

Ale

$$\frac{R}{R_4} = \frac{R_1}{R_2},$$

więc

$$-\frac{L}{CR_4} I_3 + R_3 I_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2} I_3 + R_1 I_3 = 0.$$

Po podzieleniu przez  $I_3$  ( $I_3 \neq 0$ ) otrzymujemy:

$$-\frac{L}{CR_4} + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2} + R_1 = 0,$$

ostatecznie

$$L = C \frac{R_4}{R_2} (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1).$$

Metoda II polega na wprowadzeniu oporów urojonych dla pojemności i indukcyjności. Otrzymujemy następujący układ równań dla równowagi mostka (przez miernik  $M$  nie płynie prąd).

Natężenie prądu  $I$  płynącego przez cewkę, opór  $R$  i opór  $R_4$  wynosi:

$$I = \frac{E}{i\omega L + R + R_4},$$

gdzie  $E$  jest napięciem źródła prądu zmiennego o częstości  $\omega$  zasilającego mostek ( $i = \sqrt{-1}$  – jednostka urojona, przyp. red.)

Natężenie prądu  $I_1$  płynącego przez opór  $R_1$  wynosi:

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{i\omega C}}} = \frac{E(R_2 + R_3 + \frac{1}{i\omega C})}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + \frac{R_1 + R_2}{i\omega C}}.$$

Spadek napięcia  $U_1$  na oporze  $R_2$  wynosi:

$$U_1 = I_1 \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{i\omega C}}} = I_1 \frac{R_2(R_3 + \frac{1}{i\omega C})}{R_2 + R_3 + \frac{1}{i\omega C}}.$$

Natężenie prądu  $I_3$  płynącego przez opór  $R_3$  i pojemność wynosi:

$$I_3 = \frac{U_1}{R_3 + \frac{1}{i\omega C}}.$$

Ze względu na to, że przez miernik nie płynie prąd, spadek napięcia  $U_2$  na pojemność  $C$  wynoszący

$$U_2 = I_3 \frac{1}{i\omega C}$$

oraz spadek napięcia  $U_3$  na oporze  $R_4$  wynoszący

$$U_3 = IR_4$$

muszą być sobie równe

$$U_3 = U_2.$$

Po podstawieniu odpowiednich wyrażeń na natężenia prądów i skorzystaniu z ostatniej równości otrzymujemy:

$$\frac{R_2}{i\omega C(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 + \frac{R_1 + R_2}{i\omega C})} = \frac{R_4}{i\omega L + R + R_4},$$

skąd

$$R_4 i\omega C(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3) + R_1R_4 + R_2R_4 = R_2 i\omega L + RR_2 + R_2R_4.$$

Wobec tego muszą być spełnione następujące równania:

na część rzeczywistą

$$R_1R_4 - RR_2 = 0$$

i część urojoną

$$R_4\omega C(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3) - R_2\omega L = 0,$$

a więc

$$R = \frac{R_1R_4}{R_2}$$

oraz

$$L = C \frac{R_4}{R_2} (R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1).$$

Powyższe warunki wystarczają, aby mostek był w równowadze dla dowolnej częstotliwości. W szczególności dla częstotliwości  $\omega = 0$  (prąd stały) wystarczy warunek pierwszy.

### Część doświadczalna

Ta część zadania nie nastęrczała specjalnych trudności. Część uczestników olimpiady miała kłopoty z odpowiednim rozmieszczeniem oporów stałych i zmiennych w obwodzie. Niewielu uczniów zdawało sobie sprawę z dużego błędu pomiaru<sup>4</sup> w tym układzie – dochodzącego do 10 %. Należy zwrócić uwagę, że źródłem błędu są nie tylko tolerancje przyrządów, ale w pierwszym rzędzie trudności z uchyceniem punktu równowagi mostka dla prądu zmiennego.

Dla typowych mierników bład wynosi kilka henrów. Wartość  $L$  dla uzwojenia opisanego w tekście wynosi kilkanaście henrów.

### Punktacja

1. Część teoretyczna ..... 10 pkt.
2. Część doświadczalna ..... 10 pkt.

### *Komentarz*

Zadanie to jest znacznie trudniejsze teoretycznie od poprzedniego (zad. D1 – przyp. red.) i było mniej popularne. Pierwsza metoda rozwiązania teoretycznego zastosowana została jedynie przez kilku uczniów. Pozostali – przeważnie uczniowie techników stosowali metodę drugą, przy czym wielu korzystało ze wzorów na zamianę trójkąta impedancji w gwiazdę. Oczywiście wszystkie poprawne rozwiązania teoretyczne oceniano na 10 pkt.

---

<sup>4</sup>Zob. przyp. 3.