XXVII OLIMPIADA FIZYCZNA (1977/1978). Stopień II, zadanie teoretyczne.

Źródło: Olimpiada Fizyczna XXVII – XXVIII, WSiP, Warszawa 1983

Autor: Gorzkowski Waldemar, Kotlicki Andrzej

Nazwa zadania: bieg po sinusoidzie promienia świetlnego w ośrodku niejednorodnym

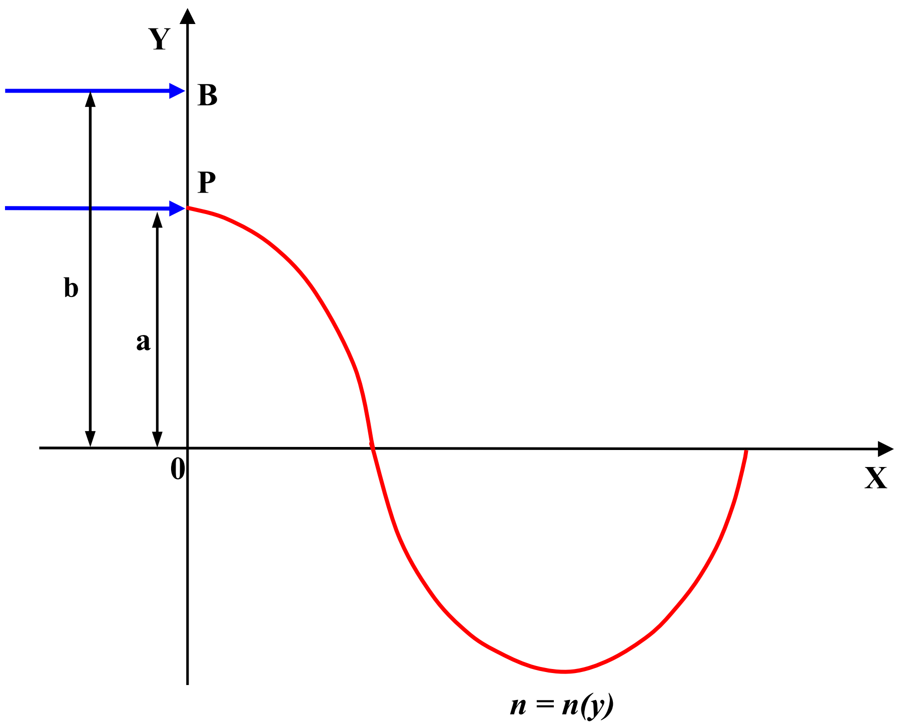
Działy: optyka geometryczna

Słowa kluczowe: promień świetlny, ośrodek optyczny, ośrodek niejednorodny, krzywoliniowe rozchodzenie światła, bieg promienia, współczynnik załamania, sinusoida, funkcja

Zadanie teoretyczne - T3, zawody II stopnia, XXVII OF.

Na powierzchnię ośrodka o współczynniku załamania zależnym od y, w punkcie A pada prostopadle do powierzchni promień świetlny.

1. Jaka powinna być postać funkcji $n(y)$, aby wewnątrz ośrodka promień świetlny biegł po sinusoidzie?
2. Czy można tak dobrać postać funkcji $n(y)$, aby dowolne dwa promienie padające prostopadle na rozważany ośrodek (np. w punktach P i B pokazanych na rysunku 1) poruszały się po sinusoidach o tym samym okresie?

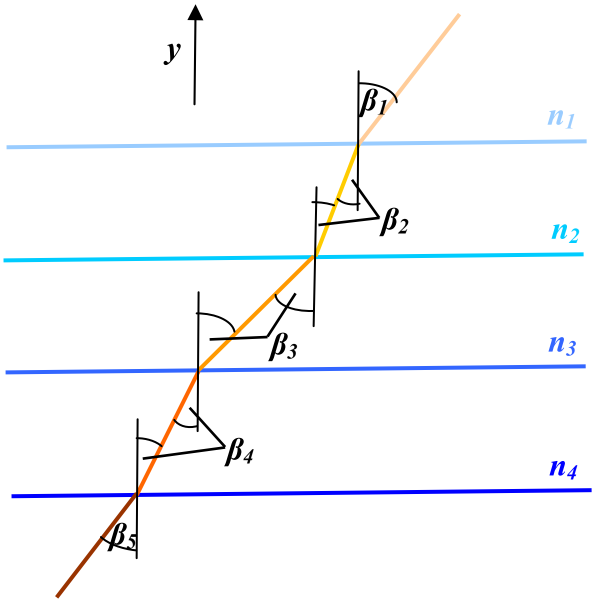


Rys. 1.

Rozwiązanie:

Dla równoległego układu płytek (rys. 2) z prawa załamania mamy:

$$\frac{\sin\beta_i}{\sin\beta_{i+1}} = \frac{n_{i+1}}{n_i}$$



Rys. 2

Wynika stąd, że

$$n_i \sin\beta_i = \text{const}.$$

Związek ten nie zależy ani od grubości, ani od liczby płytek, wobec tego dla ciągłego rozkładu współczynnika załamania wzdłuż osi y możemy napisać

$$n(y)\sin\beta(y) = n(a)\sin 90° = n(a),$$

stąd

$$\sin\beta(y) = \frac{n(a)}{n(y)}.$$

Równanie sinusoidy przechodzącej przez punkt P i stycznej w punkcie P do promienia padającego:

$$y = a\cos kx,$$

gdzie k jest jakąś stałą.

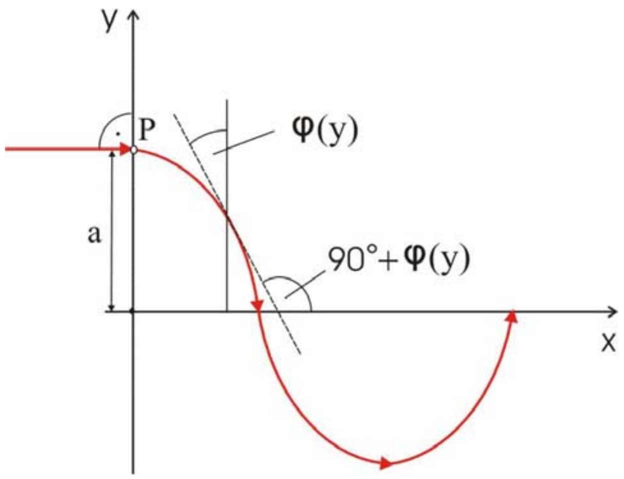
Tangens kąta $90° + \beta(y)$ (rys. 3) jest pochodną $y(x)$:

$$tg(90° + \beta(y)) = -ak\sin kx,$$

$$tg(90° + \beta(y)) = -ctg\beta(y),$$

ale

$$\sin kx = \sqrt{1-\cos^2 kx} = \sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}.$$



Rys. 3

Biorąc pod uwagę, że $ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1$ można napisać:

$$\frac{1}{\sin^2\beta(y)} = 1 + k^2(a^2 - y^2)\,.$$

Korzystając z otrzymanego poprzednio wyrażenia na $\sin\beta(y)$ dostajemy

$$\frac{n^2(y)}{n^2(a)} = 1 + k^2(a^2 - y^2)\,,$$

czyli

$$n(y) = n(a)\sqrt{1 + k^2(a^2 - y^2)}\,.$$

Jeżeli promienie padające na ten sam ośrodek w punktach P i B miałyby poruszać się po sinusoidach tym samym okresie, to musiałaby zachodzić tożsamość:

$$n(a)\sqrt{1 + k^2(a^2 - y\ \ )} = n(b)\sqrt{1 + k^2(b^2 - y^2)}\,.$$

Tożsamość ta dla $a \neq b$ nie może zachodzić. Zatem odpowiedź na pytanie 2 jest negatywna.

Uzupełnienie do rozwiązania zadania (PDFiA US)

Jeżeli wiązka światła przechodzi przez kilka ośrodków, jak zostało to przedstawione na Rys. 4 (zgodnie ze zwrotem osi y ośrodki mają coraz większy współczynnik załamania), prawo Snella można zapisać w postaci

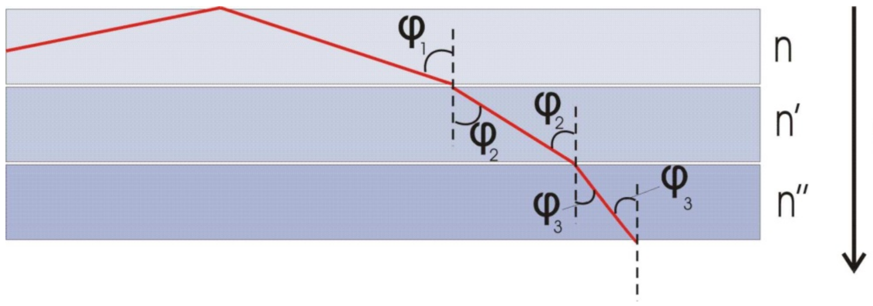
$$n\sin\varphi_1 = n'\sin\varphi_2\,.$$

Następnie

$$n'\sin\varphi_2 = n''\sin\varphi_3 .$$

Stąd

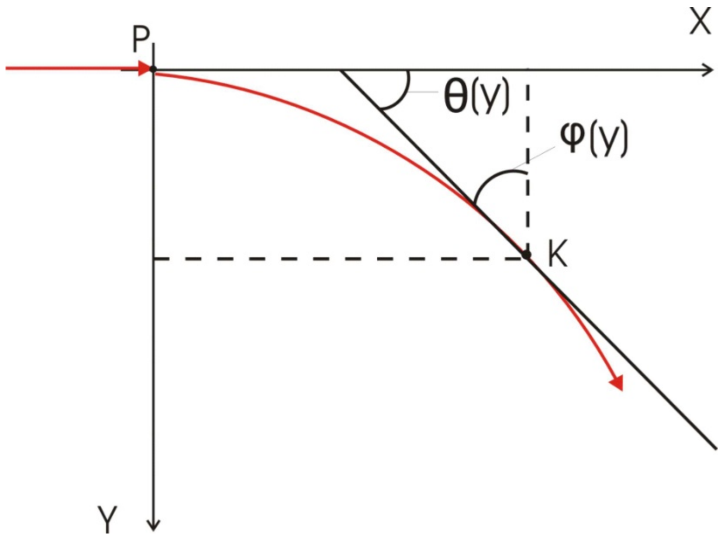
$$n_i \sin\varphi_i = const. \qquad (1.1)$$



Rys. 4.

Związek (1.1) zachodzi niezależnie od liczby i grubości poszczególnych warstw. Korzystając więc z niego w przypadku ciągłej zmiany współczynnika załamania w jednym kierunku, jak to występuje w przedstawianym doświadczeniu (Rys. 5.) otrzymujemy:

$$n(y)\sin\varphi(y) = const. \qquad (1.2)$$



Rys. 5.

W punkcie $x = 0$, parabola wyznaczona przez promień jest styczna do osi x. A więc w tym układzie, jej równanie możemy zapisać w postaci

$$y = ax^2,$$

gdzie a jest stałą charakteryzującą parabolę.

Korzystając z zależności (1.2), dla punktów P i K możemy zapisać:

$$n(y)\sin\varphi(y) = n(0)\sin\varphi(0),$$

ale ponieważ

$$\sin\varphi(0) = \sin 90^\circ = 1, \text{ a } n(0) = n_0$$

to

$$\sin\varphi(y) = \frac{n_0}{n(y)} \tag{1.3}$$

W punkcie *K* tangens kąta nachylenia stycznej jest równy pochodnej funkcji $y = ax^2$:

$$tg\theta(y) = 2ax = 2a\sqrt{\frac{y}{a}} = 2\sqrt{ay}\ ;\ \frac{dy}{dx} = 2ax\ ;\ x = \sqrt{\frac{y}{a}}$$

Jeżeli mamy $tg\theta(y)$ to możemy wyznaczyć $\sin\varphi(y)$. Ponieważ

$$tg\theta(y) = ctg\varphi(y)$$

to

$$\sin\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\varphi(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+4ay}}\ . \tag{1.4}$$

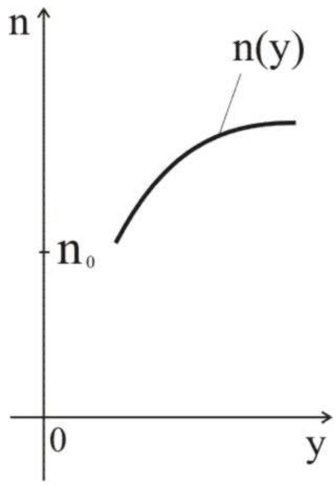
Porównując (1.3) z (1.4), mamy

$$\frac{n_0}{n(y)} = \frac{1}{\sqrt{1+4ay}}$$

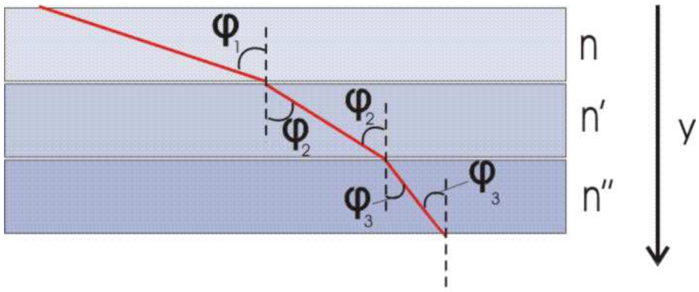
Czyli

$$n(y) = n_0\sqrt{1+4ay}\ .$$

Otrzymaliśmy zależność współczynnika załamania *n* od wartości *y*.



Rys. 6. Wykres funkcji $n(y) = n_0\sqrt{1+4ay}$.



Rys. 7.

Jeżeli wiązka światła przechodzi kolejno przez kilka ośrodków, jak zostało to przedstawione na Rys. 7 (zgodnie ze zwrotem osi y ośrodki mają coraz większy współczynnik załamania), prawo Snella można zapisać w postaci:

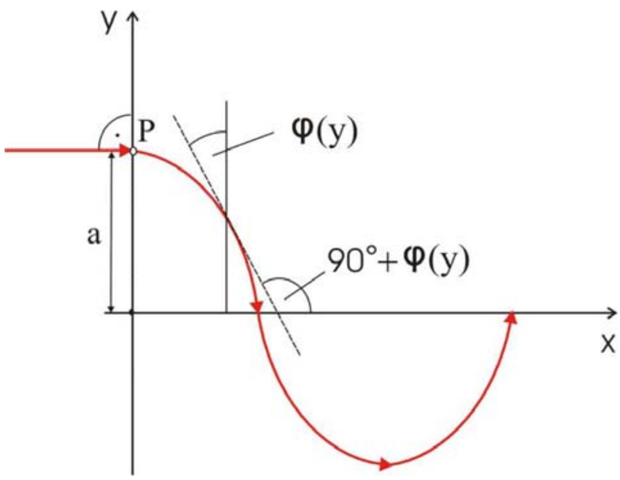
$$n \sin \varphi_1 = n' \sin \varphi_2 .$$

Następnie

$$n' \sin \varphi_2 = n'' \sin \varphi_3 .$$

Z tego wynika, że

$$n_i \sin \varphi_i = const.$$



Rys. 8.

Jeżeli sinusoida przechodząca przez punk P jest styczna w tym punkcie do padającego promienia (Rys. I.15) to jej równanie możemy zapisać:

$$y = a \cos kx ,$$

z tego wynika, że

$$\cos kx = \frac{y}{a}.$$

Dla ciągłego rozkładu współczynnika załamania, co ma miejsce w doświadczeniu przedstawionym powyżej, możemy zapisać

$$n(y)\sin\varphi(y) = n(a)\sin\varphi(a),$$

ale ponieważ

$$\sin\varphi(a) = \sin 90^\circ = 1, \text{ a } n(a) = n_0$$

to

$$\sin\varphi(y) = \frac{n_0}{n(y)}. \tag{1.1}$$

Jak wynika z Rys. 8. , tangens kąta 90°+*φ(y)* nachylenia stycznej jest pochodną funkcji $y = a\cos kx$:

$$\frac{dy}{dx} = -ak\sin kx \;\Rightarrow$$

$$tg(90^\circ + \varphi(y)) = -ak\sin kx. \tag{1.2}$$

Ale ponieważ

$$\sin kx = \sqrt{1-\cos^2 kx} = \sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}},$$

równanie (1.2) przyjmuje postać

$$tg(90^\circ + \varphi(y)) = -ak\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}. \tag{1.3}$$

Biorąc pod uwagę, że zachodzi następująca równość:

$$tg(90^\circ + \varphi(y)) = -ctg\varphi(y)$$

równanie (1.3) przyjmuje postać

$$-ctg\varphi(y) = -ak\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}. \tag{1.4}$$

Ponieważ cotangens kąta α można zapisać w postaci

$$ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1$$

z równania (1.4) otrzymujemy

([1])
$$\frac{1}{\sin^2\varphi(y)} - 1 = a^2k^2\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \Rightarrow$$

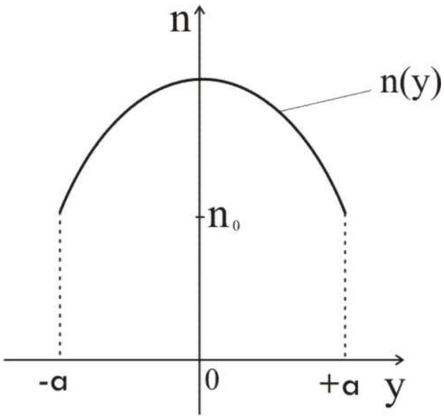
$$\frac{1}{\sin^2\varphi(y)} = 1 + k^2(a^2 - y^2).$$

Korzystając z wyrażenia (1.1) mamy

$$\frac{n^2(y)}{n^2{}_0} = 1 + k^2(a^2 - y^2) \Rightarrow$$

$$n(y) = n_0\sqrt{1 + k^2(a^2 - y^2)}$$

Otrzymaliśmy zależność współczynnika załamania *n* od wartości *y* .



Rys. 9. Wykres funkcji $n(y) = n_0\sqrt{1 + k^2(a^2 - y^2)}$

([1]) Funkcji *n(y)* wprowadzona została do uzupełnienia