# XXVII OLIMPIADA FIZYCZNA (1977/1978). Stopień III, zadanie doświadczalne – D

**Źródło:** Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki:
*Fizyka w Szkole* nr 1, 1979;
Olimpiada fizyczna XXVII – XXVIII. WSiP, Warszawa 1983 (str. 52 – 54);
Olimpiada fizyczna. Wybrane zadania doświadczalne z rozwiązaniami. Stowarzyszenie *Symetria i Własności Strukturalne*, Poznań 1994 (str. 35, 87 – 89).

**Nazwa zadania**: Wyznaczanie częstotliwości drgań własnych struny

**Działy:** Mechanika, drgania mechaniczne

**Słowa kluczowe:** analiza wymiarowa, fala stojąca, drgania mechaniczne, struna, generator, częstość, częstotliwość drgania, gęstość liniowa, niepewność pomiaru.

## Zadanie doświadczalne – D, zawody III stopnia, XXVII OF.

Mając:

- strunę stalową o znanej gęstości liniowej rozpiętą na statywie,
- linijkę,
- wkładkę do słuchawki telefonicznej bez membrany (elektromagnes z namagnesowanym rdzeniem) z dołączonymi przewodami,
- generator napięcia sinusoidalnego o nastawnej częstotliwości,
- butelkę, pełniącą rolę obciążnika struny,
- zlewkę o pojemności 100 cm$^3$ (do kreski),
- wodę,
- kawałek sztywnego drutu,
- papier milimetrowy,

wyznacz empirycznie wzór na częstości własne drgań struny.

Do wyznaczenia postaci wzoru wykorzystaj wyniki pomiarów i analizę wymiarową.

Gęstość liniowa struny wynosi (563 ± 3) mg/m. Masa butelki wynosi (530 ± 40) g.

## Rozwiązanie

W treści zadania zasugerowano, że do znalezienia postaci wzoru na częstość drgań struny należało wykorzystać analizę wymiarową. Szukana częstość drgań własnych może zależeć jedynie od siły naciągu struny $F$ ($[F]$ = kg · m · s$^{-2}$), masy struny na jednostkę długości czyli gęstości liniowej $\eta$ ($[\eta]$ = kg · m$^{-1}$), oraz długości struny $l$, ($[l]$ = m). Ponieważ obciążenie struny było stosunkowo niewielkie, tak że nie należało się spodziewać jej sprężystego wydłużenia, moduł sprężystości można było w tym rozumowaniu pominąć.

Korzystając z analizy wymiarowej, szukany wzór możemy zapisać w postaci

$$f = kF^{\alpha}\eta^{\beta}l^{\gamma} + f_0$$

gdzie:

$k$ – stała bezwymiarowa,
$f$ – częstotliwość,
$f_0$ – stała o wymiarze s$^{-1}$.

Wymiarowo mamy

$$[f - f_0] = [kF^{\alpha}\eta^{\beta}l^{\gamma}] = [F]^{\alpha}[\eta]^{\beta}[l]^{\gamma}$$

a podstawiając jednostki mamy

$$\mathrm{s}^{-1} = \left(\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\right)^{\beta} \cdot \mathrm{m}^{\gamma},$$

czyli

$$\mathrm{s}^{-1} = \mathrm{kg}^{\alpha+\beta} \cdot \mathrm{m}^{\alpha-\beta+\gamma} \cdot \mathrm{s}^{-2\alpha}.$$

Stąd, porównując potęgi przy tych samych podstawach mamy

$$\alpha + \gamma - \beta = 0; \quad \alpha + \beta = 0; \quad 2\alpha = 1,$$

a więc

$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad \beta = -\frac{1}{2}; \quad \gamma = -1.$$

Wynika stąd, że szukany wzór ma postać

$$f = k \cdot \frac{1}{l} \cdot \sqrt{\frac{F}{\eta}} + f_0.$$

Można do niego oczywiście dojść metodą prób i błędów i wielu uczestników tak właśnie postępowało. Stałą $f_0$ można przyjąć równą 0, ponieważ łatwo sprawdzić, że struna nieobciążona nie drga. Jest to dodatkowym argumentem za pominięciem w rozumowaniu własności sprężystych struny.

W zestawie doświadczalnym jaki finaliści mieli do dyspozycji (rys. 1) struna była zamocowana z obu końców wobec czego na końcach struny musiały powstać węzły fali stojącej. Wynika stąd, że w długości struny $l$ musiała się mieścić całkowita wielokrotność połowy długości fali

$$n\frac{\lambda}{2} = l,$$

gdzie $n$ jest liczbą naturalną.

Ponieważ $f = \frac{\upsilon}{\lambda}$, gdzie $\upsilon$ jest prędkością rozchodzenia się fali poprzecznej w strunie, mamy

$$f = \frac{n\upsilon}{2l}.$$

Z porównania tego wzoru z poprzednio uzyskanym wzorem na częstość drgań struny wynika, że

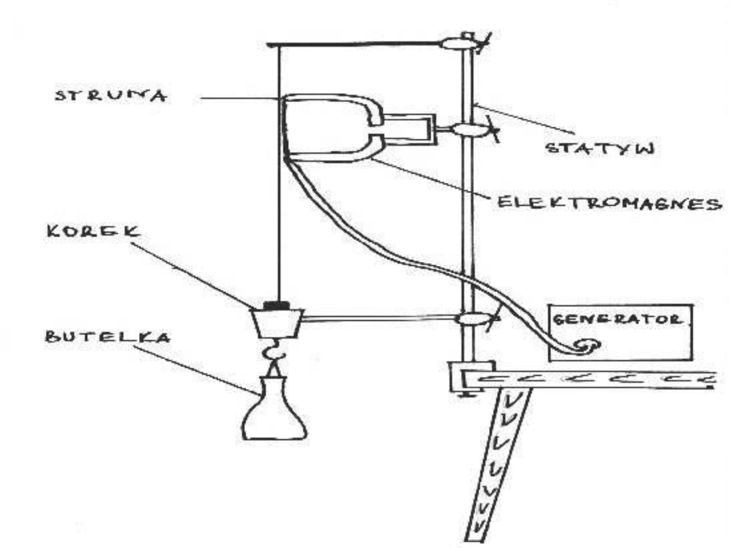
$$f = A\frac{n}{2l} \cdot \sqrt{\frac{F}{\eta}},$$

gdzie $A$ jest stałą bezwymiarową.

W części eksperymentalnej zadania należało sprawdzić czy zależność częstości własnej drgań struny od siły napinającej i długości struny jest taka jak to wynika ze wzoru a następnie wyznaczyć stałą $A$. Należało także sprawdzić czy rzeczywiście dla danego obciążenia struny i danej jej długości można było uzyskać drganie własne o częstości $n$ razy większej od podstawowej.

Zestaw doświadczalny przedstawiony na rysunku 1 był prawie gotowy. W celu zmierzenia częstości drgań własnych struny w określonych warunkach należało wykorzystać zjawisko rezonansu. Zmieniając częstość drgań prądu z generatora można było doprowadzić do pobudzenia struny przez elektromagnes zbliżony do niej na odległość około 1 mm. Rezonans było łatwo zaobserwować – wychylenia struny były widoczne – lub wyczuć przykładając do struny sztywny drucik. Ta druga metoda była szczególnie przydatna przy badaniu wyższych częstości rezonansowych.

Jedynie niewielu uczestników zastanowiło się dlaczego rdzeń elektromagnesu był magnesem trwałym. Chodziło o to, żeby siła przyciągająca strunę zmieniała się z tą samą częstością co prąd z generatora. Jak wiadomo elektromagnes przyciąga nienamagnesowane żelazo, jakim jest struna, niezależnie od kierunku płynącego prądu, a więc dwa razy w czasie jednego okresu prądu sinusoidalnie zmiennego. Gdyby więc rdzeń był nienamagnesowany to rezonans następowałby przy częstości generatora dwa razy mniejszej od częstości własnej drgań struny. Taką błędną w tym przypadku sugestię wysunęło kilku uczestników. Fakt, że rdzeń był namagnesowany powodował, że pole magnetyczne cewki elektromagnesu zwiększało lub zmniejszało pole magnetyczne rdzenia zależnie od kierunku przepływu prądu i wobec tego okres zmian siły przyciągania struny był równy okresowi zmian prądu.




Rys. 1

Obciążenie struny można było zmieniać dolewając odmierzoną objętość wody do butelki a długość struny przez dodatkowe zamocowanie jej w dowolnym miejscu drutem do statywu. Najłatwiej było pobudzać strunę do drgań, umieszczając elektromagnes w pobliżu spodziewanej strzałki fali stojącej, a więc dla $n$ = 1, 3 itp. w połowie długości struny, dla $n$ = 2 w $1/4$ długości itd.

Częstość podstawowa użytej struny obciążonej jedynie pustą butelką wynosiła około 80 Hz. Zależność częstości od odwrotności długości struny, od pierwiastka z siły obciążającej i od rzędu drgania $n$ należało wykreślić. Uzyskanie linii prostych przechodzących przez środek układu współrzędnych potwierdzało poprawność uzyskanego wzoru. Jednocześnie z wartości tangensa kąta nachylenia prostych można było obliczyć wartość stałej $A$, która wynosiła 1. Należało przeprowadzić ocenę niepewności pomiarowej z jakim została wyznaczona stała $A$.

## Proponowana punktacja

### Część teoretyczna

1. Prawidłowa koncepcja eksperymentu i opis mechanizmu pobudzania struny do drgań ........ 2 pkt.
2. Przeprowadzenie analizy wymiarowej i otrzymanie prawidłowego wzoru na częstość drgań struny ........ 5 pkt.
3. Prawidłowe wprowadzenie do tego wzoru rzędu drgań $n$ ........ 3pkt.

### Część doświadczalna

1. Zbadanie zależności $f$ od $F$ ........ 3pkt.
2. Zbadanie zależności $f$ od $l$ oraz $n$ ........ 3pkt.
3. Wyznaczenie stałej $A$ ........ 2pkt.
4. Analiza niepewności pomiarowej ........ 2pkt.

Wyniki uzyskane przez finalistów w zadaniu doświadczalnym należy uznać za bardzo dobre. Dziewięciu uczestników uzyskało ponad 30 punktów (od obu recenzentów łącznie), trzydziestu sześciu między 20 a 29 punktów, dwudziestu czterech pomiędzy 10 a 19 punktów a jedynie dziesięciu poniżej 10 punktów.