XXIX OLIMPIADA FIZYCZNA (1979/1980). Etap I, zadanie teoretyczne - T1

Źródło: Olimpiada fizyczna. Wybrane zadania doświadczalne z rozwiązaniami.

Autor: Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki

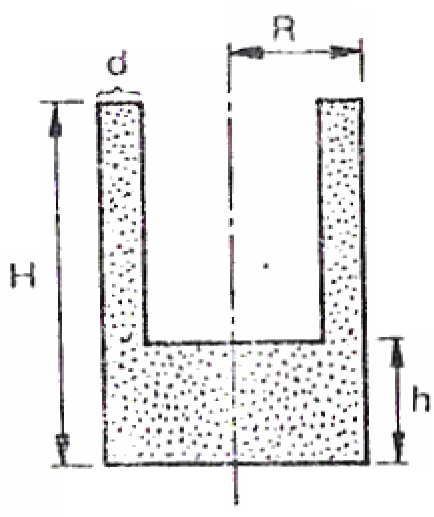
Nazwa zadania: Równowaga naczynia o grubym dnie

Działy: Mechanika bryły sztywnej

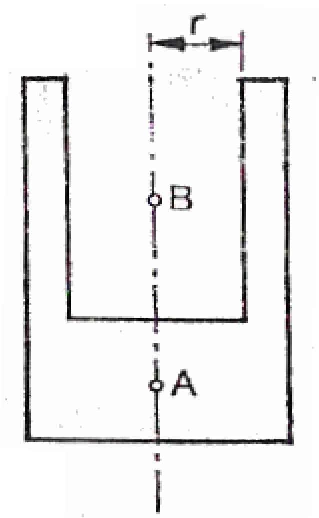
Słowa kluczowe: Równowaga trwała, środek ciężkości

Zadanie teoretyczne T1, zawody I stopnia, XXIX OF.

Dane jest walcowe naczynie o kształcie pokazanym na rysunku 1. Jaka powinna być grubość dna *h*, aby naczynie nie przewracało się, przy możliwie jak największym pochyleniu podstawy, na której stoi?



Rys.1



Rys.2

Rozwiązanie

Naczynie będzie w równowadze trwałej, tzn. będzie powracać do pierwotnego położenia po odchyleniu go o pewien kąt, dopóki rzut pionowy środka ciężkości (środka masy) naczynia nie wyjdzie poza obręb podstawowy. Stąd wynika, ze im niżej będzie położony środek ciężkości, o tym większy kąt będzie można odchylić naczynie, i nie będzie się ono przewracało.

Należy więc znaleźć taka wysokość podstawy naczynia *h*, przy której środek masy będzie położony najniżej.

Podzielmy naczynie na dwie części, tak jak na rysunku 2 i przyjmijmy oznaczenia zgodnie z warunkami zadania. Masa dolnej części naczynia wynosi:

$$M_1 = \pi R^2 h \rho$$

(ρ- gęstość materiału, z którego wykonane jest naczynie), a jej środek ciężkości *A* leży ponad podstawą na wysokości:

$$p_1 = \frac{h}{2}.$$

Odpowiednio dla górnej części naczynia mamy:

$$M_2 = \pi(R^2 - r^2)(H-h)\rho$$
$$p_2 = h + \frac{1}{2}(H-h) = \frac{1}{2}(H+h)$$

gdzie: $r = R - d$ promień wewnętrzny naczynia.
Zgodnie z definicja środka masy, jego wysokość ponad podstawą jest dana wyrażeniem:

$$p = \frac{M_1 p_1 + M_2 p_2}{M_1 + M_2}$$

Zatem

$$p(h) = \frac{1}{2}\frac{r^2h^2 + (R^2 - r^2)H^2}{r^2h + (R^2 - r^2)H}$$

Należy zatem znaleźć minimum funkcji $p(h)$ w przedziale (0,H). W tym celu należy rozwiązać równanie

$$p'(h) = \frac{dp}{dh} = 0$$

czyli równanie

$$\frac{2r^2h[r^2h + H(R^2 - r^2)] - [r^2h^2 + H^2(R^2 - r^2)]r^2}{[r^2h + H(R^2 - r^2)]^2} = 0$$

Stąd po przekształceniach otrzymamy:

$$r^2h^2 + 2H(R^2 - r^2)h - H^2(R^2 - r^2) = 0$$
$$h^2 + 2\frac{H(R^2 - r^2)}{r^2}h - H\frac{H(R^2 - r^2)}{r^2} = 0$$

Przyjmując oznaczenie

$$A = \frac{R^2 - r^2}{r^2}H$$

mamy :

$$h^2 + 2AH - AH = 0$$

Po rozwiązaniu tego równania dostajemy, że funkcja $p(h)$ ma minimum dla

$$h = -A + \sqrt{A(A+H)}$$
$$A = \frac{R^2 - r^2}{r^2}H \quad .$$