XXIX OLIMPIADA FIZYCZNA
(1969/1970)
ZAWODY III STOPNIA
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Zadanie teoretyczne – T2

Nazwa – Temperatura czarnej kulki umieszczonej w ognisku soczewki i ogrzanej promieniami słonecznymi.

Źródła – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej
– Waldemar Gorzkowski[1], Andrzej Kotlicki[2], *Fizyka w Szkole* nr 1/1981 s. 35–41
– Andrzej Nadolny[3], Krystyna Pniewska[4], *Olimpiada fizyczna XXIX–XXXI*, Warszawa 1969, s. 65–68
– Włodzimierz Ungier[5], Mirosław Hamera[6], *Wybrane zadania z 43 Olimpiad Fizycznych*, MAGIPPA, Warszawa 1994, zad. 95, s. 31, 108–109
– T.M. Molenda, www.OF.szc.pl.

Dana jest soczewka cienka o średnicy d = 5 cm i ogniskowej f = 10 cm. Za pomocą tej soczewki, przez zogniskowanie promieni słonecznych, chcemy maksymalnie ogrzać ciało doskonale czarne w postaci kulki o promieniu r. Wyznacz zależność temperatury, do której możemy ogrzać kulkę, od jej promienia r.

Zakładamy, że soczewka przepuszcza całe padające nań światło i że proces ogniskowania prowadzimy w próżni w otoczeniu o temperaturze T_0 = 300 K. Zakładamy ponadto, że kulka doskonale przewodzi ciepło, dzięki czemu w każdej chwili temperatura wszystkich jej punktów jest taka sama.

Dane liczbowe:

1) stała słoneczna

$$S = 0{,}139\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}}$$

2) stała Stefana-Boltzmanna

$$\sigma = 5{,}67\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{cm}^2\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{K}^4}$$

3) temperatura powierzchni Słońca

$$T_S = 6000\ \mathrm{K}$$

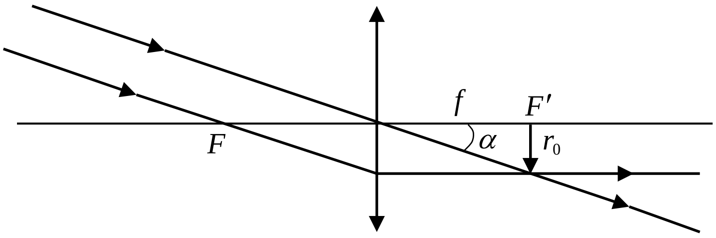
Uwaga: Całkowita energia wypromieniowania w ciągu 1 s przez 1 cm^2 powierzchni ciała doskonale czarnego, zgodnie z prawem Stefana-Boltzmanna, wynosi σT^4, gdzie σ oznacza stałą Stefana-Boltzmanna, a T – temperaturę bezwzględną ciała.

Rozwiązanie zadania T2 — XXIX OF, III stopień, część teoretyczna

Obrazem Słońca, który powstaje dokładnie w płaszczyźnie ogniskowej soczewki (rys. 1), jest koło o promieniu r_0 takim, że

$$\frac{r_0}{f} = \mathrm{tg}\alpha, \tag{1}$$

gdzie α oznacza promień kątowy Słońca widzianego z Ziemi[1].



Rys. 1

Ponieważ kąt α jest mały, można z dobrym przybliżeniem przyjąć, że $\mathrm{tg}\alpha \approx \alpha$, a zatem

$$r_0 = \alpha f.$$

Kiedy na kulkę doskonale czarną nie pada światło słoneczne, wówczas pozostaje ona w równowadze termicznej z otoczeniem, tzn. wypromieniowuje tyle energii w jednostce czasu, ile jej pochłania z otoczenia. Szybkość wypromieniowania tej energii (moc), zgodnie z prawem Stefana-Boltzmanna, wynosi

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 \sigma T_0^4, \tag{2}$$

gdzie T_0 jest temperaturą, przy której występuje stan równowagi termicznej.

Gdy na kulkę skierujemy wiązkę światła słonecznego, wtedy pochłania ona energię tego światła. Jeżeli promień kulki r jest większy niż r_0, wówczas cała ogniskowana energia jest pochłaniana przez kulkę. Energia tego promieniowania dochodząca w ciągu jednej sekundy wynosi $S\pi d^2/4$. Oprócz tego kulka absorbuje, tak jak poprzednio, promieniowanie termiczne z otoczenia. Odpowiadający temu dopływ energii w ciągu jednej sekundy zgodnie z (2) wynosi $4\pi r^2 \sigma T_0^4$. Z drugiej strony kulka mając temperaturę T, wypromieniowuje w czasie jednej sekundy energię $4\pi r^2 \sigma T^4$. Ponieważ kulka doskonale czarna w stanie ustalonej temperatury emituje tyle energii, ile jej pochłania, bilans energii można więc zapisać w postaci:

$$4\pi r^2 \sigma T^2 = 4\pi r^2 \sigma T_0^4 + \frac{1}{4}\pi S d^2, \qquad r \geqslant \alpha f. \tag{3}$$

Stąd

$$T = \sqrt[4]{T_0^4 + \frac{S}{\sigma}\left(\frac{d}{4r}\right)^2}. \tag{4}$$

[1] Średnica kątowa w astronomii (rozmiar kątowy ciała niebieskiego) to kąt pomiędzy krawędziami ciała niebieskiego, w którego wierzchołku znajduje się obserwator, dla Słońca wynosi ok. 32′ = 0,0093 rad (31′31″–32′33″) (przyp. red.).

Jeżeli promień kulki zmaleje poniżej $r_0 = \alpha f$, to pada na nią tylko część energii skupianej przez soczewkę, która wynosi

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \frac{1}{4}\pi S d^2,$$

czyli

$$\frac{1}{4}\left(\frac{r}{\alpha f}\right)^2 \pi S d^2.$$

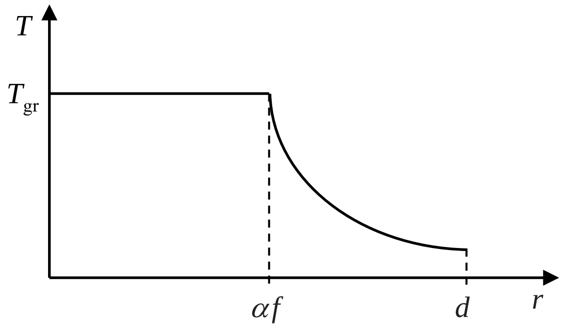
Bilans energii w tym przypadku jest następujący:

$$4\pi r^2 \sigma T^2 = 4\pi r^2 \sigma T_0^4 + \frac{1}{4}\pi S d^2 \left(\frac{r}{\alpha f}\right)^2, \qquad r < \alpha f. \tag{5}$$

Stąd

$$T = \sqrt[4]{T_0^4 + \frac{S}{\sigma}\left(\frac{d}{4\alpha f}\right)^2} \quad (= T_{\mathrm{gr}}). \tag{6}$$

Zauważmy, że temperatura ta jest stała i dalsze zmniejszanie rozmiarów kulki nie zwiększa T. Jest to temperatura graniczna T_{gr}. Wykres zależności $T(r)$ podany jest na rysunku 2.



Rys. 2. Wykres zależności temperatury T kulki od jej promienia r; dla $r < \alpha f$ temperatura osiąga wartość stałą równą T_{gr}, następnie, do wartości równej d (średnicy soczewki), T maleje wg zależności (4)

Dyskusję przypadku, gdy średnica kulki przekracza średnicę soczewki pozostawiamy Czytelnikowi.

Spróbujmy oszacować temperaturę graniczną T_{gr}. Zauważmy, że Słońce z bardzo dobrym przybliżeniem możemy traktować jako ciało doskonale czarne i wówczas zgodnie z prawem Stefana-Boltzmanna energia wypromieniowana przez powierzchnię Słońca w ciągu 1 sekundy zgodnie z (2) wynosi

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{s}}}{\mathrm{d}t} = 4\pi R_{\mathrm{s}}^2 \sigma T_{\mathrm{s}}^4, \tag{7}$$

gdzie T_{S} – temperatura Słońca, R_{S} – promień Słońca.

Wiemy, że stała słoneczna, jest to ilość energii promienistej wysłanej przez Słońce w ciągu jednej sekundy przechodzącej przez 1 cm^2 powierzchni ustawionej prostopadle do kierunku Ziemia-Słońce w odległości od Słońca równej odległości Ziemia-Słońce, stąd możemy zapisać

$$S = \frac{4\pi R_{\mathrm{s}}^2 \sigma T_{\mathrm{s}}^4}{4\pi R_{\mathrm{zs}}^2}, \tag{8}$$

gdzie R_{ZS} oznacza odległość Ziemia-Słońce.

Ponieważ promień kątowy Słońca α wynosi

$$\alpha = \frac{R_S}{R_{ZS}},$$

stąd otrzymamy związek

$$\frac{S}{\alpha^2 \sigma} = T_S^4. \tag{9}$$

Po podstawieniu (9) do (6), otrzymujemy wzór na temperaturę graniczną kulki w postaci:

$$T_{gr} = \sqrt[4]{T_0^4 + \left(\frac{d}{4f}\right)^2 T_S^4} \approx T_s \sqrt{\frac{d}{4f}}. \tag{10}$$

Do tego samego rozwiązania, gdy promień kulki jest mniejszy od $r_0 = \alpha f$, można dojść stosując odmienną metodę. Zauważmy, że powierzchnię Słońca z kulki widać wewnątrz stożka o kącie rozwarcia 2β, gdzie

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{d}{2f},$$

tzn. w kącie bryłowym $\gamma_1 = 2\pi(1 - \cos\beta)$, zaś otoczenie o temperaturze T_0 widać w kącie bryłowym $\gamma_2 = 2\pi(1 + \cos\beta)$.

W jednostce czasu na kulkę, z kąta bryłowego γ_1 pada promieniowanie słoneczne o energii $\gamma_1 r^2 \sigma T_S^4$ (T_S – temperatura Słońca), a z kąta bryłowego γ_2 – promieniowanie otoczenia o energii $\gamma_2 r^2 \sigma T_0^4$ (T_0 – temperatura otoczenia). Kulka po ogrzaniu się do temperatury T emituje w jednostce czasu promieniowanie o energii $4\pi r^2 \sigma T^4$. W stanie równowagi termicznej bilans energetyczny ma postać

$$4\pi r^2 \sigma T^4 = \gamma_1 r^2 \sigma T_S^4 + \gamma_2 r^2 \sigma T_0^4.$$

Podstawiając wielkości γ_1 oraz γ_2 otrzymamy

$$4\pi r^2 \sigma T^4 = 2\pi(1 - \cos\beta) r^2 \sigma\, T_S^4 + 2\pi(1 + \cos\beta) r^2 \sigma T_0^4.$$

Drugie wyrażenie można pominąć w porównaniu z pierwszym, gdyż T_S^4 jest znacznie większe od T_0^4. Stąd można wyznaczyć temperaturę kulki

$$T = T_S \sqrt[4]{\frac{1-\cos\beta}{2}} = T_S \sqrt{\sin\frac{\beta}{2}}. \tag{11}$$

Jest to wielkość stała, niezależna od promienia kulki.

Dla małych kątów β można przyjąć

$$\sin\frac{\beta}{2} \approx \frac{\beta}{2} \approx \frac{d}{4f}. \tag{12}$$

Stąd otrzymujemy

$$T_{gr} = T_S \sqrt{\sin\frac{\beta}{2}} = T_S \sqrt{\frac{d}{4f}}. \tag{13}$$

Uzyskany wzór jest identyczny z poprzednio wyprowadzonym wzorem (10). Jak z niego widać, temperatura graniczna uzyskiwana przez kulkę zależy od parametrów soczewki, nie może jednak przekroczyć temperatury Słońca T_S. Dla cienkiej soczewki $d/f \leqslant 1$, zatem nie można uzyskać temperatury bliskiej temperaturze Słońca.

W naszym przypadku $\frac{d}{4f} = \frac{1}{8}$, stąd temperatura graniczna

$$T_{gr} = 2100 \text{ K}.$$

Zauważmy, że promień kątowy Słońca $\alpha \approx 0{,}0043$ rad. Wynika stąd, że temperaturę taką można teoretycznie uzyskać dla $r \leqslant 0{,}04$ mm (bo $r_0 \approx \alpha f_0$). Praktycznie wady soczewek powodują „rozmyte" ogniskowanie i nie obserwujemy aż tak wysokiej temperatury. Niemniej wiadomo, że w ognisku soczewki na skutek skupiania się tam promieni słonecznych można zapalić zapałkę.

[1] Dr Waldemar Gorzkowski był wieloletnim sekretarzem naukowym ds. zadań w KGOF w XIX−XXXVII OF, z przerwą od II st. XXX OF do końca XXXI OF, autor i współautor bardzo wielu artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF i książek z zadaniami OF, w tym międzynarodowej OF. Bardzo zasłużony dla naszej olimpiady fizycznej jak i międzynarodowej gdzie, od 1983 r., pełnił funkcję Sekretarza Generalnego, później przemianowaną na funkcję prezesa, którą sprawował do śmierci w 2007 r. (www.kgof.edu.pl/50MOF/historia.php); prowadził również międzynarodowy konkurs prac uczniowskich *First Step to Nobel Prize in Physics*. Za osiągnięcia został uhonorowany *Nagrodą Polskiego Towarzystwa Fizycznego im. Krzysztofa Ernsta za Popularyzację Fizyki* (przyp. red.).

[2] Andrzej Kotlicki (wówczas dr) był kierownikiem organizacyjnym w KGOF, od XXV OF do XXXVII OF, w tym okresie był współautorem artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF i ww. książki z zadaniami i książki, wspólnie z W. Gorzkowski, *Olimpiada fizyczna. Wybrane zadania doświadczalne z rozwiązaniami*. W latach 1984–1999 był sekretarzem Międzynarodowej Olimpiady Fizycznej. (Od 1991 r. – prof. University of British Columbia.) (przyp. red.)

[3] Dr Andrzej Nadolny był sekretarzem naukowym ds. zadań w KGOF od II st. XXX OF do XXXI OF, w tym okresie był współautorem artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF i ww. książki z zadaniami (przyp. red.).

[4] Krystyna Pniewska (Garbowska-Pniewska) pełniła funkcję Kierownika Organizacyjnego Olimpiady Fizycznej w XXX OF w 1981 r, w XXXIV OF i następnie, wspólnie z dr A. Kotlickim, do XXXVII OF; w tym okresie była autorką lub współatorką artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF, współautorką ww. książki (przyp. red.).

[5] Włodzimierz Ungier (wówczas dr) był sekretarzem naukowym ds. zadań teoretycznych w KGOF od XL OF do XLXIX OF, w tym okresie był współautorem artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF i ww. książki (przyp. red.).

[6] Dr Mirosław Hamera pełnił funkcję zastępcy Kierownika Organizacyjnego Olimpiady Fizycznej w XXXVIII i XXXIX OF a w XL OF był kierownikiem, w tym okresie był autorem artykułów w *Fizyce w Szkole* o przebiegu i wynikach OF; współautor ww. książki z zadaniami (przyp. red.).