III OLIMPIADA FIZYCZNA (1953/1954). Stopień I, zadanie teoretyczne – T4

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Stefan Czarnecki: *Olimpiady Fizyczne* I – IV. PZWS, Warszawa 1956, s. 166-174.

Nazwa zadania: Pozorny ruch ciała po okręgu w świetle stroboskopowym.

Działy: Kinematyka, mechanika.

Słowa kluczowe: ruch, okres, częstotliwość, prędkość pozorna, stroboskop

Zadanie teoretyczne – T4, zawody I stopnia, III OF

W dokładnie zaciemnionym pokoju po okręgu koła o promieniu *r* porusza się ruchem jednostajnym ciało *A* o rozmiarach bardzo małych w porównaniu z promieniem *r*. Okres tego ruchu równy jest T_0.

Ciało *A* jest widoczne tylko chwilami, dzięki krótkotrwałym błyskom lampy, następującym w równych odstępach czasu *T*. Czas *T* nazywamy okresem błysków.

Odpowiedzieć na następujące pytania:

1. Jak zmienia się charakter i kierunek pozornego obserwowanego ruchu „skokowego" punktu *A*, gdy okres błysków *T* zmieniamy; od wartości małej w porównaniu z okresem T_0 aż do wartości 2 T_0 (przyjmujemy, że okres obiegu T_0 jest dostatecznie duży, aby nie brać pod uwagę zjawisk fizjologicznych związanych z przetrzymywaniem przez siatkówkę oka wrażeń świetlnych)?
2. Znaleźć związek między średnią pozorną prędkością v ruchu obserwowanego a okresem obiegu ciała po kole T_0 i okresem błysków *T* w przypadku:

$$\frac{T_0}{2} < T < \frac{3T_0}{2}$$

3. Jaki winien być najmniejszy okres błysków *T*, aby obserwator widział pozorny ruch ciała *A* *n*-krotnie zwolniony i odbywający się w kierunku wstecznym ?
4. Wskazać metodę, za pomocą której można by zmierzyć częstość, obrotów wału lub kół maszyn, wykorzystując do tego celu! omawiane zjawisko, zwane efektem stroboskopowym.
5. (pytanie nieobowiązkowe). Przyjmując, iż ciało *A* jest wycinkiem koła (lub pierścienia kołowego) takim, że w kole mieści się całkowita liczba takich wycinków, oraz wiedząc, że siatkówka oka przetrzymuje wrażenia świetlne *k* sekund (gdzie 0,04 s < *k* < 0,2 s). Obmyślić sposób pomiaru *k* dla różnych ludzi.

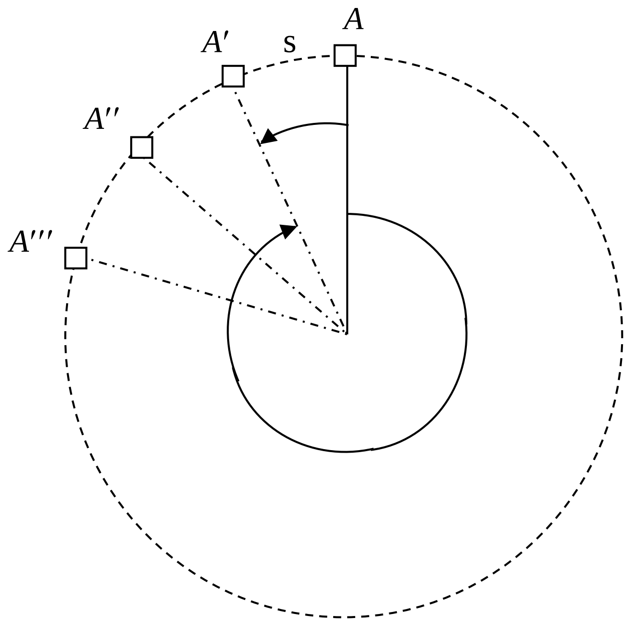
Rozwiązanie

1. Rozwiązanie pierwszej części zadania rozbijemy na kilka przypadków w zależności od wielkości okresu błysku w stosunku do okresu obiegu ciała *A*,

a) $T < T_0/2$, $n > 2n_0$. Między jednym a drugim kolejnym błyskiem .ciało *A* zakreśli łuk mniejszy niż polowa obwodu, przy każdym następnym błysku obserwator zobaczy je o taki sam odcinek okręgu dalej. Stwierdzi on innymi słowy skokowy ruch ciała *A* po obwodzie koła z prędkością średnią równą co do wartości i kierunku prędkości rzeczywistej v_0.

b) $T = T_0/2$, $n = 2n_0$. Każdy następny kolejny błysk oświetli ciało *A*, gdy znajdować się ono będzie o 1/2 obwodu kola dalej niż przy błysku poprzednim. Obserwator będzie je widział co $T_0/2$, na przemian raz na jednym, a raz na drugim końcu tej samej średnicy. Gdy okres T_0 jest dostatecznie krótki, tzn. gdy częstość jest na tyle duża, że $T_0/2 < k$, wtedy obserwator widzieć będzie na przeciwległych końcach średnicy pozornie dwa ciała *A*.

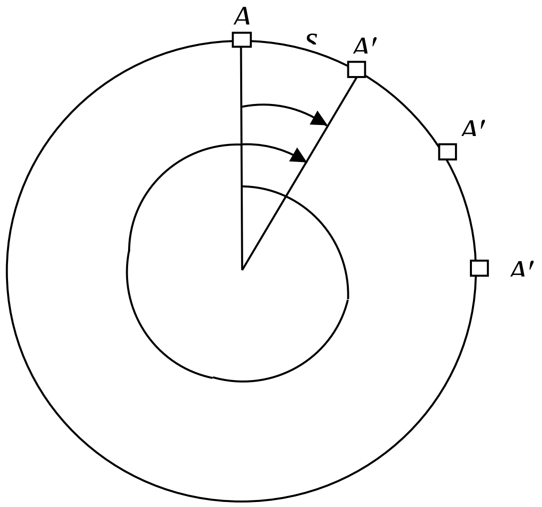
c) $T_0/2 < T < T_0$, $n_0 < n < 2n_0$. Ponieważ okres błysków jest krótszy od okresu obiegu ciała A, przeto następny kolejny błysk oświetli je w położeniu A' (rys. 1). W ciągu czasu równego T ciało A przesunęło się po dłuższym łuku $AA' = 8$ i zajęło położenie A'. Obserwatorowi wydaje się, że ciało przesunęło się po łuku krótszym AA' w kierunku wstecznym. Przy trzecim błysku obserwator zobaczy je w położeniu A'', po czwartym w A''' itd. Dla obserwatora ciało A będzie pozornie wykonywać ruch wsteczny z prędkością $v = s/T$.



Rys. 1.

d) $T = T_0$, $n = n_0$. Skoro oba okresy są równe, przeto między jednym a drugim błyskiem ciało opisze pełny okrąg i znajdzie się na tym samym miejscu. W rezultacie ciało A będzie pozostawać pozornie nieruchome.

e) $T_0 < T < 3/2\ T_0$, $2/3 n_0 < n < n_0$. Okres błysków T jest teraz dłuższy od okresu obiegu T_0. W ciągu zatem czasu T ciało A obiegnie nie tylko cały obwód, ale ponadto odcinek obwodu s (rys. 2) zawarty między 0 i πr ($0 < s < \pi r$). Przeprowadzając analogiczno rozumowanie jak w przypadku c dojdziemy do wniosku, że obserwator stwierdzi pozorny skokowy ruch ciała A w kierunku zgodnym z ruchem rzeczywistym, jednak z prędkością znacznie od rzeczywistej mniejszą.

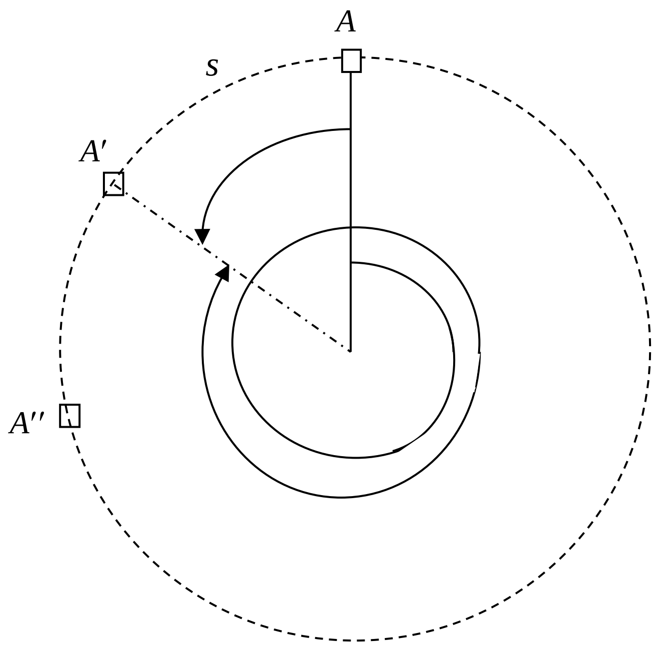


Rys. 2.

f) $T = 3T_0/2$, $n = 2n_0/3$. Przypadek ten jest podobny do przypadku b. W ciągu jednego okresu błysków ciało A obiegnie 1½ obwodu, każdy więc następny błysk zastanie je na przemian to na jednym, to na drugim końcu tej samej średnicy. Czas między jednym a drugim ukazaniem się ciała A będzie 3 razy dłuższy niż w przypadku b ($3T_0/2$).

g) $3\,T_0/2 < T < 2\,T_0$, $2\,n_0 < n < 2n_0/3$. Z rysunku 3 widać od razu, że w tym przypadku kolejne błyski zastaną ciało A w położeniu np. A, A', A'', ... a obserwator podobnie jak w przypadku b stwierdzi pozorny skokowy ruch wsteczny.

h) $T = 2T_0$, $n = n_0/2$. Ciało ukazywać się będzie co $2T_0$ stale w tym samym punkcie.



Rys. 3.

h)

2. Dla wyznaczenia prędkości pozornego ruchu ciała A ($T_0/2 < T < 3T_0/2$) skorzystamy z rys. 1. Prędkość tę łatwo obliczymy jako stosunek pozornej drogi s do okresu błysków T.

Rzeczywista prędkość wynosi

$$v_0 = \frac{2\pi r}{T_0}, \tag{1}$$

a rzeczywista droga odbyta w czasie T:

$$S = \frac{2\pi r}{T_0}\cdot T.$$

Pozorna droga wynosi więc

$$s = S - 2\pi rT = \frac{2\pi rT}{T_0} - 2\pi r = \frac{2\pi r\left(T - T_0\right)}{T_0},$$

stąd prędkość pozorna

$$v = \frac{2\pi r\left(T - T_0\right)}{T_0 T}. \tag{2}$$

Widać stąd, że dla:

$T < T_0$ mamy $\upsilon < 0$ (ruch wsteczny),
$T = T_0$ mamy $\upsilon = 0$,
$T > T_0$ mamy $\upsilon > 0$ (ruch prosty),

przy czym gdy $T \to T_0$, to i również $\upsilon \to 0$.

Wzór (1) nietrudno uogólnić i dla $T > 2\ T_0$, mamy

$$\upsilon = \frac{2\pi r\left(T - mT_0\right)}{T_0 T}, \tag{3}$$

gdzie m oznacza ile w okresie błysków T mieści się pełnych okresów obiegu punktu A.

Wzory (2) i (3) znacznie się uproszczą, jeżeli operować będziemy nie prędkościami liniowymi po obwodzie, a częstościami. Oznaczmy przez ν częstość pozornego ruchu ciała A, przez n — częstość faktycznego ruchu tego ciała i przez n_0 – częstość błysków. Z uwagi na związek $\upsilon = \omega r$ możemy napisać

$$\upsilon = 2\pi\nu r \quad \text{oraz} \quad \upsilon_0 = 2\pi n_0 r.$$

Podstawiając te ostatnie wartości do wzoru (2) otrzymujemy

$$\nu = \frac{T - T_0}{T_0 T} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n_0}}{\frac{1}{n_0} \cdot \frac{1}{n}},$$

czyli

$$\nu = n_0 - n. \tag{2'}$$

Podobnie ze wzoru (3):

$$\nu = n_0 - mn. \tag{3'}$$

3. Warunek, by prędkość ruchu pozornego była n razy mniejsza od rzeczywistej i skierowana wstecz, łatwo znajdziemy ze wzoru (1) oraz (2) pisząc:

$$n = \frac{\upsilon_0}{-\upsilon} = -\frac{2\pi r}{T_0} \cdot \frac{T_0 T}{2\pi r\left(T_0 - T\right)} = \frac{T}{T_0 - T},$$

skąd wynika natychmiast:

$$T = \frac{n}{n+1} T_0.$$

4. Zjawiska stroboskopowego używa się niejednokrotnie do pomiarów częstości obrotów lub też (nawet częściej) do kontroli ich: stałości. Przytoczymy kilka możliwych rozwiązań.

Wyobraźmy sobie, że koło, którego obroty mamy zmierzyć, ma z boku blisko obwodu plamkę namalowaną białą farbą, lub też jeśli; posiada ono szprychy, to jedna z nich pomalowana jest na biało. Koło to oświetlamy lampą neonową zasilaną prądem zmiennym sieciowym o częstości 50 cykli na sekundę. Błysków mamy zatem n = 100 s^{-1} lub jeśli użyjemy prądu jednokierunkowo prostowanego, n = 50 s^{-1}. Zamiast neonówki można użyć wiązki światła ciągłego przerywanej periodycznie za pomocą wirującej tarczy z otworami, napędzanej synchronicznym silniczkiem elektrycznym.. Można również koło oświetlić światłem ciągłym, a za to patrzeć przez otwory takiej wirującej tarczy – jest to zupełnie równoznaczne.

Jeżeli szukana częstość koła jest n_0, to częstość pozornego ruchu kołowego białej plamy, w myśl wzoru (3'), wynosi

$$\pm\,\nu = n_0 + mn,$$

przy czym znak plus dotyczy pozornego ruchu prostego, natomiast minus – ruchu wstecznego. Szukana częstość koła będzie

$$n_0 = mn \pm \nu.$$

By wyznaczyć n_0, wystarczy policzyć w ciągu minuty liczbę obiegów pozornych plamy i dodać lub odjąć od znanej częstości błysków. Od razu jednak widać, że metoda taka może być stosowana tylko w bardzo ograniczonych ramach. mianowicie wtedy tylko, gdy n_0 mało się różni od mn, gdzie m = 1, 2, 3, … . Możemy więc mierzyć n_0 bardzo dokładnie, ale w wąskich zakresach. I tak na przykład zakresy takie przy użyciu neonówki będą:
gdy m = 1: 96 s^{-1} ÷ 104 s^{-1} (ewentualnie 46 ÷ 54 s^{-1} przy zasilaniu neonówki przez jednokierunkowy prostownik), gdy m = 2: 196 ÷ 204 s^{-1} (96 ÷ 104 s^{-1}) itd. Więcej bowiem niż cztery pozorne obiegi plam}- w ciągu sekundy trudno by było wizualnie policzyć[1].

Z uwagi na te niedogodności metoda ta nadaje się raczej do bardzo dokładnej kontroli stałości obrotów (mierzenia drobnych odchyleń od przepisanej częstości). Istotnie, znajduje ona zastosowanie np. przy sprawdzaniu prawidłowej częstości obrotów płyt gramofonowych. Płyta gramofonowa powinna wykonywać 78, 45 lub $33 1/3$ obrotów na minutę. Ażeby sprawdzić, czy tak jest w istocie, na płycie kładziemy specjalny krążek tekturowy z określoną ilością wycinków na przemian czarnych i białych, a następnie w czasie jego ruchu oświetlamy go neonówką.

W celu pozbycia się ograniczeń przy dokonywaniu pomiarów n_0 lepiej jest postąpić inaczej, a mianowicie badane koło oświetlić wiązką światła przechodzącą przez otwory wirującej tarczy[2] (rys. 4). Tarcza jest obracana przez silniczek elektryczny o częstości obrotów regulowanej w szerokich granicach za pomocą np. opornicy. Silniczek zaopatrzony jest ponadto w automatyczny wskaźnik częstości obrotów.

Nadajmy tarczy na tyle szybkie obroty, by mieć przekonanie, że częstość błysków n spełnia na pewno warunek $n > 2n_0$. Teraz stopniowo obniżamy częstość błysków i obserwujemy pozorny ruch plamy. W pewnej chwili zobaczymy dwie plamy na przeciwległych końcach średnicy ($n = 2n_0$ – przypadek 1b), potem szybki pozorny ruch wsteczny plamy stopniowo zwalniający, aż wreszcie pojawi się jedna plama nieruchoma. Świadczyć to będzie, że częstość błysków i częstość mierzona są sobie równe ($n = n_0$). Jeżeli na tarczy mamy p otworów, a wskaźnik obrotów przy silniczku pokaże N s^{-1} wtedy możemy napisać:

$$n_0 = NP.$$

Dokładność pomiaru w wysokim stopniu będzie oczywiście zależna od dokładności wskaźnika szybkości obrotów silniczka napędzającego tarczę.

Można również postąpić inaczej. Dobrać mianowicie jakąkolwiek znaną częstość błysków n_1, przy której następuje pozorne zatrzymanie koła. Wówczas:

$$n_0 = mn_1.$$

Następnie zmniejszać w sposób ciągły ilość błysków do takiej wartości n_2, przy której koło ulega powtórnemu pozornemu zatrzymaniu.

Teraz:

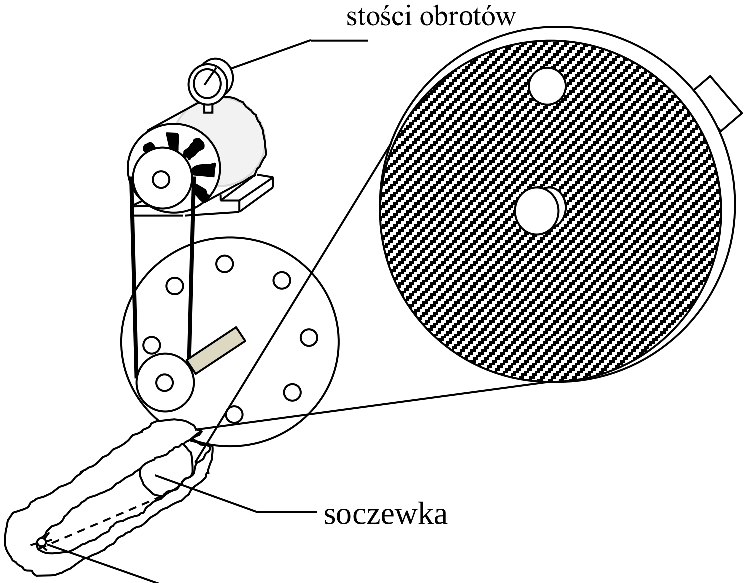
$$n_0 = (m + 1)n_2.$$

Rugując z obu związków m otrzymamy szukaną częstość obrotu koła

[1] Można rozszerzyć ten zakres malując na kole nie jedną, ale więcej plam, np. cztery jednakowe i rozmieszczone równomiernie na obwodzie koła. W ten sposób co ¼ obrotu powtarza się ten sam układ plam. Pozwala to na dokonywanie pomiarów częstości cztery razy mniejszych.

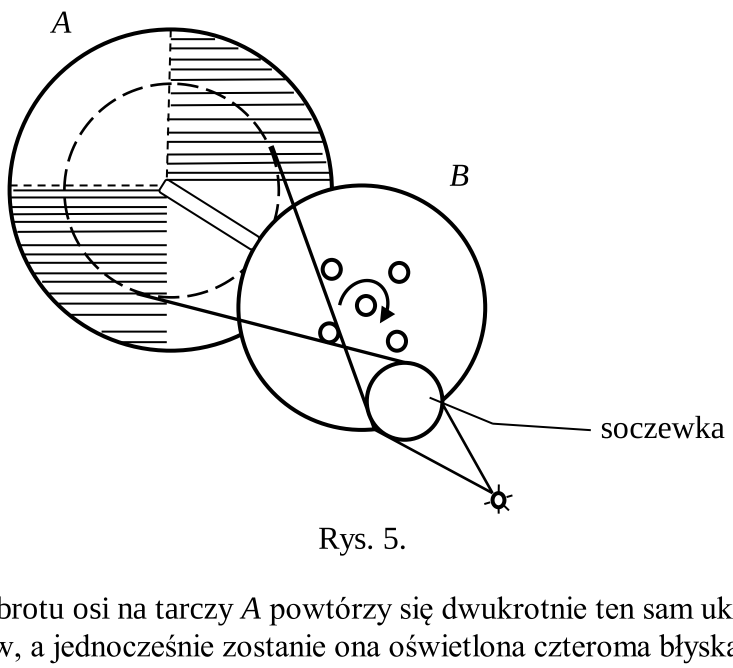
[2] Można również oświetlać neonówką z generatora drgań relaksacyjnych o regulowanej częstości.

$$n_0 = \frac{n_1 n_2}{n_1 - n_2}.$$



Rys. 4.

5. Wyobraźmy sobie urządzenie składające się z dwóch tarcz *A i B* (rys. 5) umocowanych sztywno na wspólnej osi. Tarcza *A* wykonana jest z matowego szkła z zaczernionymi dwoma naprzeciwległymi kwadratami (brak zaznaczenia na rys.). Tarcza *B* wykonana z blachy posiada cztery otwory umieszczone w równych od siebie odstępach i jednakowo odległe od osi. Oś napędzana jest silniczkiem o regulowanej w sposób ciągły częstości obrotów, przy czym częstość tę można w każdej chwili odczytać na specjalnym wskaźniku. Światło z żarówki punktowej zebrane jest prze soczewkę w ten sposób, że przebiega ono przez otwory w tarczy *B* i oświetla tarczę *A* błyskami.



Rys. 5.

Podczas jednego obrotu osi na tarczy *A* powtórzy się dwukrotnie ten sam układ czarnych i białych kwadrantów, a jednocześnie zostanie ona oświetlona czteroma błyskami. Jeżeli przez

n_0 oznaczymy częstość powtarzania się tego samego układu, a przez n częstość błysków, mamy wówczas:

$$n = 2n_0.$$

Jest to zatem przypadek omawiany w punkcie 1b.

Człowiek, którego wzrok ma być poddany badaniu, patrząc na wirującą tarczę A z przeciwnej strony niż pada na nią światło będzie widział pozornie nieruchome czarne i jasne sektory, ale co $T_0/2$ zmieniające się miejscami. Gdy będziemy częstość obrotów stopniowo powiększać, to dojdziemy w końcu do takiej częstości krytycznej, przy której nie zauważy on już migotania i tarcza A przedstawi mu się cała oświetlona równomiernie. Stanie się to wtedy, gdy $T_0/2$ będzie równa stałej k charakterystycznej dla jego wzroku.

Niech krytyczna częstość obrotów układu wynosi N_k, liczba błysków będzie wówczas: $n = 4N_k$ i $n_0 = 2N_k$, a stąd

$$T_0 = \frac{1}{n_0} = \frac{1}{2n_k},$$

czyli

$$k = \frac{T_0}{2} = \frac{1}{4N_k}.$$

Przypuśćmy na przykład, że obserwator widzi tarczę równomiernie oświetloną począwszy od częstości obrotu osi N_k = 150 min^{-1} = 2,5 s^{-1}. Stała charakterystyczna k dla jego wzroku wynosi zatem:

$$k = \frac{1}{4 \cdot 2{,}5}\ 0{,}1\ \mathrm{s}.$$