



XXX OLIMPIADA FIZYCZNA

ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Nazwa zadania	Analiza ruchu kulki z równi pochyłej z tarciem tocznym. ¹
Rok	1980/1981
Źródło	Komitet Główny Olimpiady Fizycznej; Waldemar Gorzkowski; Andrzej Kotlicki: <i>Fizyka w Szkole</i> , nr 3, 1981 r.; Andrzej Nadolny, Krystyna Pniewska: <i>Olimpiada Fizyczna XXIX – XXXI</i> , WSiP, Warszawa 1986; T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Zadanie T4 - XXX OF, I stopień.

Na równi o kącie nachylenia α znajduje się kula o promieniu r . Współczynnik tarcia posuwistego kulki o równię wynosi f , natomiast współczynnik tarcia potoczystego jest równy k . Początkowo kula jest nieruchoma – kulę przytrzymujemy. Opisz ruch kulki po jej zwolnieniu w przypadku, gdy $k < fr$. Jak prędkość kątowna i liniowa kulki zależą od czasu? Przedyskutuj wyniki.¹

¹Zadania z olimpiad o podobnej tematyce: XX OF, st. II – zad. T1: *Ruch kulki na równi bez poślizgu*; XXI OF, st. I – zad. T3: *Prędkość kulki staczającej się z równi pochyłej*; XXII OF, st. II – zad. dośw.: *Wyznaczanie współczynnika tarcia kulki stalowej o szkło*; VI Międzynarodowa Olimpiada Fizyczna – zad. T1: *Ruch walców staczających się z równi*; XXIV OF, st. II – zad. dośw. 2 (dodatkowe): *Wyznaczanie współczynnika tarcia posuwistego rurki o równię*; XXVII OF, st. I – zad. T1: *Ruch kulki z równi z uwzględnieniem tarcia potoczystego i posuwistego*; XXVII OF, st. III – zad. T2: *Opis ruchu kulki po poziomym stole z uwzględnieniem tarcia posuwistego i potoczystego*; XXXI OF; st. wstępny – zad. dośw. D1: *Wyznaczanie współczynnika statycznego tarcia potoczystego stali o szkło*.

Rozwiązanie zadania T4 - XXX OF, I stopień.

Tarcie toczone jest odpowiedzialne za opory utrudniające toczenie walca lub kuli po płaszczyźnie. Współczynnik k tego tarcia określa się jako stosunek wartości momentu siły M do wartości siły N dociskającej walec lub kulę do płaszczyzny:

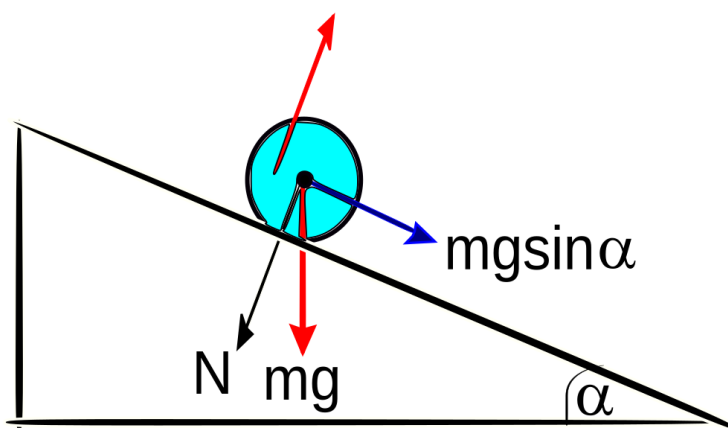
$$k = \frac{M}{N}. \quad (1)$$

Jak widać, współczynnik tarcia tocznego ma wymiar długości.

W przypadku kulki o masie m umieszczonej na równi o kącie nachylenia α (Rys. 1) siła nacisku N ma wartość:

$$N = mg \cos \alpha \quad (2)$$

(g – przyspieszenie ziemskie).



Rysunek 1: Zaznaczono dwie siły działające na kulkę znajdującą się na równi pochyłej, przyłożone do środka kulki: ciężar kulki o wartości mg i siła sprężystości równi prostopadła do podłoża równi skierowana do góry o wartości $mg \cos \alpha$ (tj. siła reakcji na siłę nacisku N kulki na podłoże o wartości $N = mg \cos \alpha$). Wypadkowa tych dwóch sił jest siłą zsuwającą równoległą do równi skierowaną w dół równi o wartości $mg \sin \alpha$. Trzecią siłą działającą na kulkę jest siła tarcia posuwistego T przyłożona do punktu styczności kulki z podłożem równi (Rys. 2).

Moment tarcia tocznego (potoczystego) M , który działa na kulkę w kierunku przedstawionym strzałką na Rys. 2 jest równy:

$$M = kmg \cos \alpha. \quad (3)$$

Ponadto na kulkę działa siła tarcia posuwistego T , przyłożona do kulki w punkcie styku z równią i skierowana wzdłuż równi ku górze. Wartość tej siły wynosi:

$$T = fmg \cos \alpha. \quad (4)$$

Równanie (3) dotyczy sytuacji, w której zachodzi staczanie się kulki, natomiast równanie (4) jest spełnione podczas poślizgu kulki.

Podczas spoczynku wartości M i T są jedynie ograniczone od góry:

$$M \leq kmg \cos \alpha, \quad (5)$$

$$T \leq fmg \cos \alpha. \quad (6)$$

Wzór (5) obowiązuje również podczas poślizgu bez toczenia, natomiast wzór (6) – podczas staczania się kulki bez poślizgu. Aby nie komplikować, przyjęto te same współczynniki k i f , co dla ruchu. W ogólności współczynniki tarcia mają różne wartości w spoczynku i w ruchu.

Rozważmy najpierw sytuację, kiedy kulka będzie pozostawała na równi w spoczynku pomimo zaprzestania działania sił przytrzymujących ją. Siła tarcia \vec{T} w tej sytuacji równoważy równoległą do równi składową siły ciężkości kulki:

$$T = mg \sin \alpha. \quad (7)$$

Ponieważ jednak punkty przyłożenia obu tych sił nie są identyczne – siła \vec{T} przyłożona jest w punkcie styku kulki z podłożem, siła ciężkości zaś w środku kulki – wynikiem istnienia tych sił jest działający na kulkę moment siły równy $rmg \sin \alpha$ (ten moment siły można traktować na przykład jako moment siły ciężkości kulki względem punktu podparcia lub też jako moment siły tarcia względem środka kulki). Omawiany moment siły jest z kolei równoważony przez moment tarcia tocznego, a więc:

$$M = rmg \sin \alpha. \quad (8)$$

Z porównania wzorów (5), (8) oraz (6) i (7) wynika, że:

$$rmg \sin \alpha \leq kmg \cos \alpha, \quad (9)$$

$$mg \sin \alpha \leq fmg \cos \alpha, \quad (10)$$

a stąd warunki na pozostawanie kulki w spoczynku są następujące:

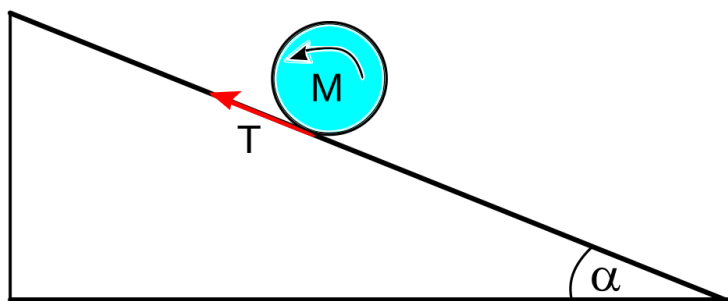
$$\operatorname{tg} \alpha \leq k/r \quad (11)$$

oraz:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq f. \quad (12)$$

Zgodnie z warunkami zadania $k/r < f$. Przy spełnieniu warunku (11) warunek (12) jest więc zawsze spełniony.

Warunkiem pozostawania kulki w spoczynku jest zatem nierówność (11), czyli kulka znajduje się w spoczynku dla kątów: $\alpha \leq \operatorname{arc} \operatorname{tg}(k/r)$.



Rysunek 2: Na kulkę działa siła tarcia posuwistego T przyłożona do punktu styczności kulki z podłożem równi i skierowana wzdłuż równi ku górze oraz moment tarcia tocznego przeciwny do obrotu toczącej się kulki – w kierunku przedstawionym strzałką (łuk) na rysunku.

Rozpatrzmy teraz kąty większe od $\arctg(k/r)$. Zapytamy najpierw, czy możliwe jest zsuwanie się kulki bez obrotu. Oznacza to różną od zera prędkość v środka kulki przy zerowej prędkości kątowej ω . Siła tarcia w tym przypadku jest określona wzorem (4). Moment tej siły względem środka kulki wynosi:

$$M_T = r f m g \sin \alpha. \quad (13)$$

Aby kulka się nie obracała, moment ten musi być równoważony przez moment M tarcia tocznego. Maksymalną wartość M określa wzór (3). Porównując ten wzór ze wzorem (13) i uwzględniając podany w zadaniu warunek $fr > k$ stwierdzamy, że $M_T > M$. Wobec tego zsuwanie się kulki bez obrotu nie jest możliwe. Kulka uzyska więc przyspieszenie kątowe $\varepsilon \neq 0$, a zatem także prędkość kątową $\omega \neq 0$.

W sytuacji toczenia się kulki moment siły tarcia tocznego dany jest wzorem (3). Ułożmy teraz równanie ruchu dla środka masy kulki:

$$ma = mg \sin \alpha - T \quad (14)$$

oraz dla ruchu obrotowego kulki wokół osi przechodzącej przez jej środek (i równoległej do podstawy równi):

$$I\varepsilon = rT - M = rT - kmg \cos \alpha. \quad (15)$$

W ostatnim równaniu I oznacza moment bezwładności kulki względem osi przechodzącej przez jej środek:

$$I = \frac{2}{5}mr^2. \quad (16)$$

Rozwiązując układ równań (14) i (15) przy warunku $\varepsilon = a/r$, który wyraża brak poślizgu, otrzymujemy:

$$a = g \frac{\sin \alpha - \frac{k}{r} \cos \alpha}{1 + \frac{I}{mr^2}}, \quad (17)$$

a po uwzględnieniu wzoru (16):

$$a = \frac{5}{7}g \left(\sin \alpha - \frac{k}{r} \cos \alpha \right). \quad (18)$$

Przyspieszenie kątowe kulki jest oczywiście równe $\varepsilon = a/r$. Bez trudu znajdujemy też, korzystając z równania (14), wyrażenie na siłę tarcia posuwistego:

$$T = mg \frac{\frac{I}{mr^2} \sin \alpha + \frac{k}{r} \cos \alpha}{1 + \frac{I}{mr^2}} = \frac{5}{7}mg \cos \alpha \left(\frac{2}{5} \operatorname{tg} \alpha + \frac{k}{r} \right). \quad (19)$$

Przy założeniu, że poślizg nie występuje, T spełnia nierówność (6). Po podstawieniu do tej nierówności wyrażenia (19) otrzymujemy warunek na kąt α :

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{5}{2} \left(\frac{7}{5}f - \frac{k}{r} \right). \quad (20)$$

Rozwiązanie to obowiązuje dla kątów α takich, że:

$$T \leq fmg \cos \alpha, \quad (21)$$

czyli takich, że:

$$\frac{5}{7} \left(\frac{2}{5} \operatorname{tg} \alpha + \frac{k}{r} \right) \leq f. \quad (22)$$

Dla $\operatorname{tg} \alpha = k/r$ lewa strona przyjmuje wartość k/r , a więc jest mniejsza niż f . Nierówność ta określa górny zakres kątów α , dla których możliwy jest ruch bez poślizgu. Poślizg oznaczałby, że siła T ma większą wartość niż wyliczona. Niech ta większa, największa możliwa siła wynosi T_{max} . Warunek $r\omega = v$ nie byłby teraz spełniony. Zwiększenie T oznacza zwiększenie ω i zmniejszenie v . Oznaczałoby to pojawienie się „ujemnego” poślizgu, co nie ma sensu. Toczenie się bez poślizgu jest w rozważanym zakresie jedyną możliwą formą toczenia się. Porównując ten wynik z warunkiem (11) widzimy, że nierówność (20) jest słabsza od nierówności (11).

Dla kątów α spełniających nierówność:

$$\operatorname{tg} \alpha > \frac{5}{2} \left(\frac{7}{5} f - \frac{k}{r} \right), \quad (23)$$

będzie zachodził poślizg i jednocześnie toczenie. W tej sytuacji M i T są określone wzorami (3) i (4), a równania ruchu (14) i (15) przyjmują postać:

$$ma = mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha, \quad (24)$$

$$I\varepsilon = -kmg \cos \alpha + frm g \cos \alpha. \quad (25)$$

Jako rozwiązania tego układu równań otrzymujemy:

$$a = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \quad (26)$$

oraz:

$$\varepsilon = \frac{5g}{2r} \cos \alpha \left(f - \frac{k}{r} \right). \quad (27)$$

Możemy też znaleźć prędkość poślizgu:

$$v_p = v - \omega r = (a - \varepsilon r)t, \quad (28)$$

$$v_p = gt \cos \alpha \left[\operatorname{tg} \alpha - \frac{5}{2} \left(\frac{7}{5} f - \frac{k}{r} \right) \right]. \quad (29)$$

Jak łatwo sprawdzić, dla kątów spełniających warunek (23) zachodzi $v_p > 0$. Oznacza to, że środek kulki porusza się szybciej, niżby to wynikało z jej prędkości kątowej.

Zestawienie wyników analizy ruchu kulki można przedstawić w postaci tabelki:

	Spoczynek	Toczenie bez poślizgu	Toczenie z poślizgiem
$\operatorname{tg} \alpha$	$0 \div \frac{k}{r}$	$\frac{k}{r} \div \frac{5}{2} \left(\frac{7}{5} f - \frac{k}{r} \right)$	$\frac{5}{2} \left(\frac{7}{5} f - \frac{k}{r} \right) \div \infty$
a	0	$\frac{5}{7} g \left(\sin \alpha - \frac{k}{r} \cos \alpha \right)$	$g(\sin \alpha - f \cos \alpha)$
ε	0	a/r	$5g \cos \alpha (fr - k) / 2r^2$
v	0	at	at
ω	0	v/r	εt