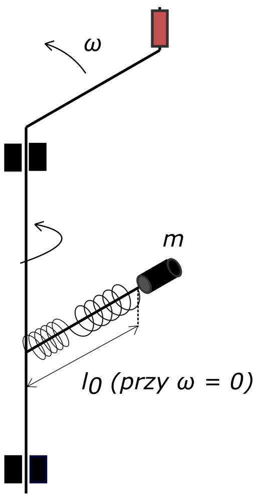
XXX OLIMPIADA FIZYCZNA
(1980/1981)
ZAWODY II STOPNIA
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Zadanie teoretyczne – T1

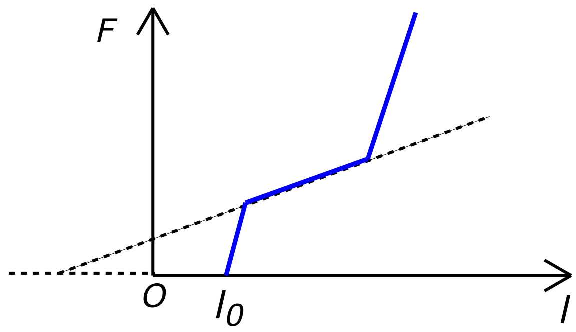
Nazwa – Analiza położenia obciążnika na pręcie zaczepionego do sprężyny niespełniającej prawa Hooke'a w ruchu obrotowym.

Źródła – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej
– Krystyna Pniewska[1], *Fizyka w Szkole* nr 5, 1981, s. 285–292
– Andrzej Nadolny[2], Krystyna Pniewska, *Olimpiady Fizyczna XXIX–XXXI*, WSIP, Warszawa, 1986, s. 114-118
– T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Dany jest układ pokazany na rys. 1. Na pręcie prostopadłym do osi obrotu nanizany jest ciężarek o masie m. Nienapięta sprężyna ma długość l_0. Zależność siły sprężystej F od długości l przedstawiono linią ciągłą na rys. 2 (sprężyna nie podlega prawu Hooke'a). Przedyskutuj zachowanie się położenia równowagi ciężarka, mogącego poruszać się po pręcie przy zmianie prędkości kątowej ω. Wpływ tarcia, poza tym, że umożliwia osiągnięcie położenia równowagi należy zaniedbać.



Rys. 1



Rys. 2

---

[1]Krystyna Pniewska (Garbowska-Pniewska) pełniła funkcję Kierownika Organizacyjnego Olimpiady Fizycznej w XXX OF w 1981 r., w XXXIV OF i następnie, wspólnie z dr A Kotlickim, do XXXVII OF, w tym okresie była autorką lub współautorką artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF, współautorki ww. książki (przyp. red.).

[2]Dr Andrzej Nadolny był sekretarzem naukowym ds. zadań w KGOF do II st. XXX OF do XXXI OF, w tym

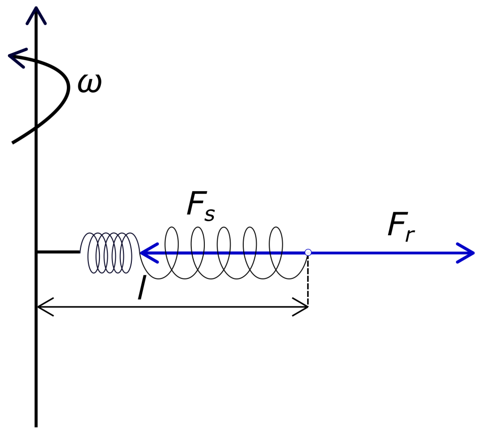
Rozwiązanie zadania T1 – XXX OF, II stopień, część teoretyczna

W układzie nieinercjalnym obracającym się wraz ze sprężyną ciężarek pozostaje w spoczynku. Działają na niego dwie siły: odśrodkowa $F_\mathrm{r} = m\omega^2 l$ i sprężystości $F_\mathrm{s} = F(l)$ dana przez wykres (rys. 2). Mają one ten sam kierunek i przeciwne zwroty. Warunki równowagi (rys. 3) jest, aby ich wartości były równe

$$F_\mathrm{s} = F_\mathrm{r}, \tag{1}$$

czyli

$$F(l) = m\omega^2 l. \tag{2}$$



Rys. 3

Siłę $F(l)$ mamy zadaną graficznie (rys. 2). Dla siły $F = 0$ wydłużenie wynosi l_0, a wraz ze zwiększeniem działającej siły długość sprężyny zmienia się zgodnie z podanym wykresem. Zakładamy, że ostatni punkt wykresu $F(l)$ oznacza maksymalną dopuszczalną długość sprężyny l_m a w przypadku działania większej siły następuje trwałe odkształcenie sprężyny i sprężyna ulega zerwaniu. Wypisane równanie (2) musimy więc przedyskutować graficznie.

Na wykresie (rys. 4) zależność siły F_r od długości sprężyny l przedstawia prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych o nachyleniu

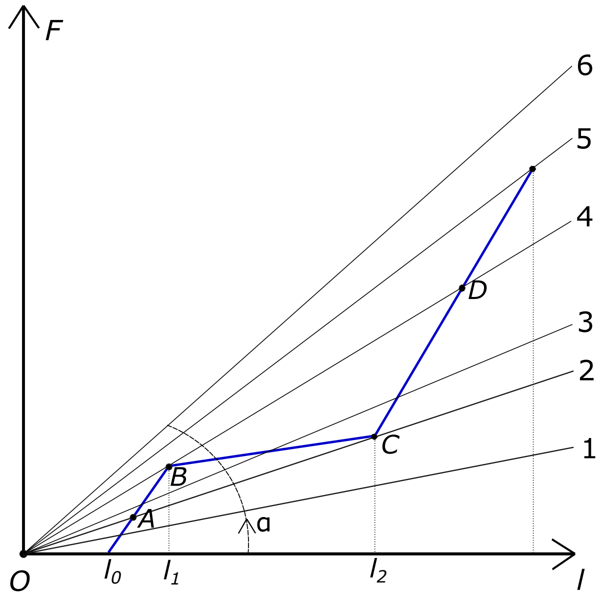
$$\mathrm{tg}\,\alpha = m\omega^2 \ (^4). \tag{3}$$

Współczynnik nachylenia tej prostej $m\omega^2$ zależy więc od prędkości kątowej układu ω. Na rysunku 4. różnym wartościom $\omega_1 < \omega_2 < ... < \omega_6$ odpowiadają proste o kątach nachylenia $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_6$ (^{5}), które z krzywą $F(l)$ mają zero, jeden, dwa, lub trzy punkty wspólne. Punkty te wyznaczają stan równowagi układu. Zależnie od wartości kątowej ω istnieje więc jedno, dwa lub trzy położenia równowagi albo nie istnieją wcale.

Oznaczając na rysunku 4 charakterystyczne dla zależności $F(l)$ wartości l_1, l_2 i maksymalne wydłużenie sprężyny l_m (zakładamy, że zachowuje ona sprężystość aż do zerwania) oraz definiując na podstawie (2):

okresie był współautorem artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF i ww. książki (przyp. red.).

[4]Ponieważ w (3) lewa strona jest bezwymiarowa, więc i prawa powinna taką być, zatem należałoby zapisać ją w nawiasie klamrowym oznaczającym wartość liczbową tj. $\mathrm{tg}\,\alpha = \{m\omega^2\}$, przy czym należy podać w jakich jednostkach jest m i ω (przyp. red.).



Rys. 4

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{F(l_2)}{ml_2}}, \qquad \omega_4 = \sqrt{\frac{F(l_1)}{ml_1}}, \qquad \omega_5 = \sqrt{\frac{F(l_\mathrm{m})}{ml_\mathrm{m}}},$$

otrzymujemy z wykresu, w zależności od prędkości kątowej ω, następujące rozwiązania:

1. $\omega < \omega_2$ jedno położenie równowagi,
2. $\omega = \omega_2$ dwa położenia równowagi (punkty A i C),
3. $\omega_2 < \omega < \omega_4$ trzy położenia równowagi,
4. $\omega = \omega_4$ dwa położenia równowagi (punkty B i D),
5. $\omega_4 < \omega < \omega_5$ jedno położenie równowagi,
6. $\omega > \omega_5$ brak położenia równowagi, sprężyna ulega zerwaniu.

Dla ustalenia charakteru równowagi należy zbadać jak zachowuje się wypadkowa siła przy niewielkich odchyleniach od położenia równowagi. Jak widać z wykresu (rys. 4) w przedziałach $l_0 < l < l_1$ oraz $l_2 < l < l_\mathrm{m}$ równowaga jest trwała, ponieważ przy zwiększaniu l siła sprężystości wzrasta szybciej niż siła odśrodkowa, a przy zmniejszaniu l jest przeciwnie, co powoduje powrót do położenia równowagi. Na odcinku $l_1 \leqslant l_2$ wychylenie (w granicach odcinka) powoduje powstanie siły powiększającej to wychylenie, a więc równowaga jest nietrwała. Także równowaga dla $l = l_\mathrm{m}$ jest nietrwała, gdyż niewielkie zwiększenie l powoduje zerwanie sprężyny. Wyniki są zebrane w tabeli 1.

Dotychczas otrzymane wyniki pozwalają przewidzieć zachowanie się położenia równowagi przy zmianach prędkości kątowej ω (zmiany te muszą być powolne, aby można było mówić o położeniu równowagi).

Popatrzymy na zmianę długości sprężyny przy rozkręcaniu układu od $\omega = 0$, poprzez ω_2, ω_4, do ω_5. Początkowo obciążnik znajduje się w odległości l_0 od osi. Podczas rozkręcania punkt opisujący położenie równowagi na rysunku 5 posuwa się wzdłuż krzywej przechodząc przez punkt A (dla $\omega = \omega_2$) i dochodzi do punktu B (dla $\omega = \omega_4$). Przekroczenie wartości ω_4 powoduje skokowe zwiększenie długości sprężyny z l_1 do $l > l_2$ – punkt opisujący położenie równowagi na krzywej przeskakuje z punktu B do punktu D. Dalszy wzrost ω powoduje wzrost l aż do wartości l_m (dla $\omega = \omega_5$), przy której sprężyna zostaje zerwana. Jeżeli przed osiągnięciem tej wartości

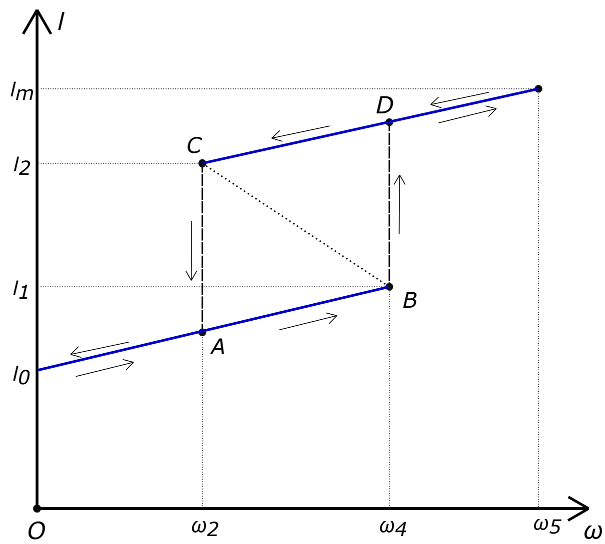
[5] Kątów $\alpha_1, ..., \alpha_6$ na rys. 4 nie zaznaczono aby zachować przejrzystość (przyp. red.).

Tabela 1.

	$l_0 < l < l_1$	$l_1 \leqslant l \leqslant l_2$	$l_2 < l < l_\mathrm{m}$	$l = l_\mathrm{m}$	Liczba położeń równowagi*	
					t	n
$\omega < \omega_2$	t	–	–	–	1	–
$\omega = \omega_2$	t	n	–	–	1	1
$\omega_2 < \omega < \omega_4$	t	n	t	–	2	1
$\omega = \omega_4$	–	n	t	–	1	1
$\omega_4 < \omega < \omega_5$	–	–	t	–	1	–
$\omega = \omega_5$	–	–	–	n	–	1
$\omega > \omega_5$	–	–	–	–	–	–

*Oznaczenia: t, n – położenie równowagi trwałej i nietrwałej (odpowiednio), (–) – zjawisko nie występuje

zaczniemy zmniejszać w sposób ciągły prędkość kątową, l będzie się w sposób ciągły zmniejszać do wartości l_2. Położenie rozważanego punktu równowagi przechodzi przez punkt D (dla $\omega = \omega_4$) i dochodzi do punktu C (dla $\omega = \omega_2$). Następnie, wskutek skokowej zmiany wydłużenia sprężyny od l_2 do $l < l_1$, przeskakuje do punktu A i zmierza do położenia początkowego. Linia ciągła na wykresie odnosi się do położenia równowagi trwałej, odcinki BD i CA odpowiadają przeskokom, a odcinek BC ($l_1 \leqslant l \leqslant l_2$) opisuje położenie równowagi nietrwałej (rys. 5).

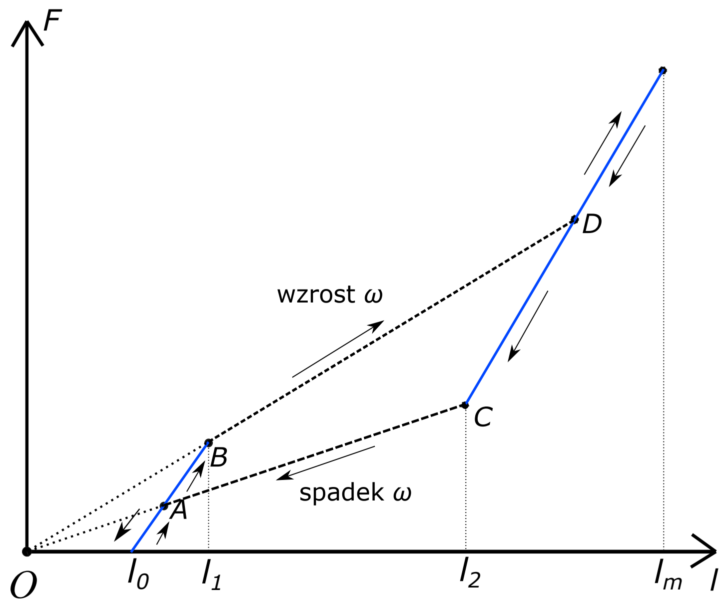


Rys. 5. Niebieskie, pogrubione linie oznaczają położenia: równowagi trwałej – linia ciągła, równowagi nietrwałej – linia BC, kropkowana; przeskoków – linia przerywana BD i AC

Omawiane powyżej zachowanie się położenia równowagi przy zmianach prędkości kątowej ω można również przedstawić w postaci wykresu (rys. 6). Punkty A, B, C, D na rysunkach 4 i 5 odpowiadają tak samo oznaczonym punktom na rysunku 6.

Zmiany położenia równowagi przy zwiększaniu i zmniejszaniu prędkości kątowej ω mają dwie szczególne cechy (porównaj rys. 6): omawiane już **skoki wartości** l oraz **histerezę** polegającą na tym, że długość sprężyny l dla danej wartości prędkości kątowej, co zależy od drogi, na której wartość ta została osiągnięta.

Można zauważyć, że pole powierzchni ograniczone krzywą histerezy na rysunku 6 reprezentuje pracę wykonaną nad układem przez siłę odśrodkową. Jest ona wykonana kosztem energii urządzenia obracającego układ (zwiększa energię wewnętrzną w procesie tarcia).



Rys. 6. Niebieską linią ciągłą zaznaczono położenia równowagi trwałej. Grubą linią przerywaną zaznaczono położenia przeskoków.

Punktacja

1. Rozważania prowadzące do wykresu na rys. 4 .... 3 pkt.
2. Rozważania nad wykresem – na rys. 5 (lub równoważne) .... 2 pkt.
3. Histereza (rys. 5 i rys. 6) .... 3 pkt.
4. Analiza rodzaju równowagi .... 2 pkt.

Powyższą punktację należy traktować jako orientacyjną. Ostateczną punktację należy ustalić po wstępnym przejrzeniu prac.

Komentarz

Zadanie sprawiło dużo trudności zawodnikom i chociaż próbowali je rozwiązać prawie wszyscy, to jedynie 13 zawodników otrzymało ocenę powyżej 6 punktów, przy maksymalnej ocenie 10 pkt.

Analiza podejścia zawodników do samego problemu fizycznego zawartego w zadaniu nasuwa wnioski dotyczące braków zarówno samego zadania, jak i procesu dydaktycznego w szkołach. Wiele z tych wniosków wysuwają osoby, które oceniały zadanie w poszczególnych okręgach.

Sformułowanie zadania posiada następujące wady:

1. W żądaniu przedyskutowania zależności wydłużenia od prędkości brak słowa „jakościowo”, co wpędziło większość zawodników w rachunki, których autorzy zadania nie oczekiwali.
2. Zmiany prędkości kątowej warto było określić jako powolne. W tym punkcie zadania nie jest niejednoznaczne, ale określenie takie zwróciłoby uwagę na fizyczny, a nie abstrakcyjnie-matematyczny charakter pytania.
3. Nie jest jasne, jakie są wartości siły sprężystości $F(l)$ dla długości sprężyny mniejszych niż w położeniu początkowym. Ma to wpływ na rodzaj położenia równowagi dla $\omega = 0$.

Zadanie ujawniało dwa istotne braki nauczania fizyki w szkole:

1. Przywiązywanie zbyt małej uwagi do analizy jakościowej zjawisk w szczególności przy użyciu graficznego przedstawienia związków między wielkościami fizycznymi.
2. Uczniowie uważają za wystarczające podanie wyniku w postaci matematycznej formuły i nie zastanawiają się nad jego fizycznym znaczeniem.