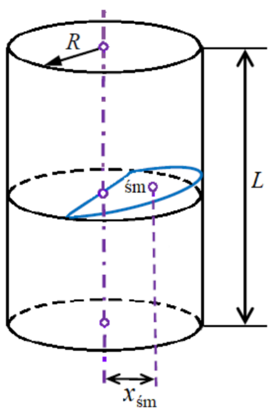
XXX OLIMPIADA FIZYCZNA
ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

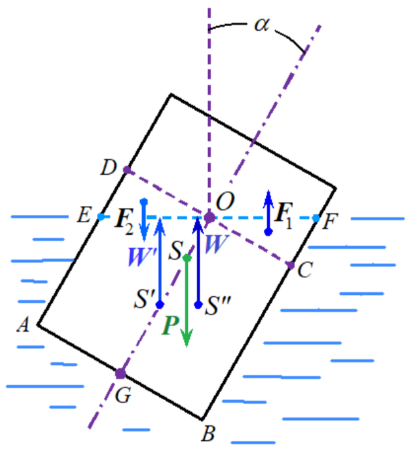
Nazwa zadania Warunek równowagi walca zanurzonego w cieczy.[1]
Rok 1980/1981
Źródło Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Andrzej Nadolny, Krystyna Pniewska:
Fizyka w Szkole nr 6, 1981;
A.Nadolny, K.Pniewska: *Olimpiady Fizyczne XXIX – XXXI*, WSiP, Warszawa 1986;
T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Zadanie T3 – XXX OF, III stopień.

Jednorodny walec pływa w cieczy. Jaki warunek musi spełniać stosunek promienia walca R do jego wysokości L, aby położenie, w którym oś walca jest pionowa było położeniem równowagi trwałej niezależnie od rodzaju cieczy (Rys. 1).[1]



Rys. 1



Rys. 2

Uwaga: Odległość środka masy (śm) wycinka walca, zaznaczonego na rysunku linią pogrubioną, od osi walca wynosi:

$$x_m = \frac{3\pi}{16} R. \tag{1}$$

Za zadanie można było maksymalnie otrzymać 26 pkt (po 13 pkt od każdego z recenzentów).

[1] podobne zagadnienia: zad. T3, II st. XXXI OF; zad. dośw., II st. LXX OF.

Rozwiązanie zadania T3 – XXX OF, III stopień.

Przytoczymy dwa sposoby rozwiązania tego zadania. W pierwszym oblicza się wypadkowy moment sił działających na pływający walec, wychylony o niewielki z położenia pionowego (ten właśnie sposób stosowali wszyscy zawodnicy rozwiązujący to zadanie). Drugi sposób polega na analizie zależności energii potencjalnej układu (walec + ciecz) od kąta wychylenia walca względem położenia pionów. Taki – energetyczny sposób podejścia można stosować we wszelkich zagadnień dotyczących równowagi, ma on więc szczególne znaczenie.

Rozważania wstępne są dla obu metod wspólne. Wprowadzamy następujące oznaczenia: ϱ_1 – gęstość materiału walca, ϱ_2 – gęstość cieczy, $\eta = \varrho_1/\varrho_2$ ($\eta < 1$). Objętość części zanurzonej walca nie zależy oczywiście od jego wychylenia względem pionu. Oznaczając przez O punkt przecięcia osi walca z powierzchnią cieczy (Rys. 2), możemy rozpatrywać wychylenia walca jako obrót wokół poziomej przechodzącej przez punkt O. Oznaczmy ponadto przez S środek ciężkości walca, przez S' środek ciężkości zanurzonej części walca w położeniu pionowym oraz przez G środek dna walca. Z warunku pływania wynika, że:

$$OG = \eta L, \tag{2}$$

oraz:

$$GS' = \frac{1}{2}\eta L. \tag{3}$$

Ponieważ ponadto:

$$GS = \frac{1}{2}L, \tag{4}$$

więc:

$$SS' = \frac{1}{2}(1-\eta)L. \tag{5}$$

Ciężar walca wynosi:

$$P = g\varrho_1 \pi R^2 L, \tag{6}$$

gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim. Do rozwiązania potrzebna będzie znajomość objętości V_w wycinka walca zaznaczonego na rysunkach 1 i 2. Dla małych kątów wychylenia α wycinek walca można zastąpić wycinkiem kuli o tym samym promieniu, otrzymuje się wówczas wzór przybliżony:

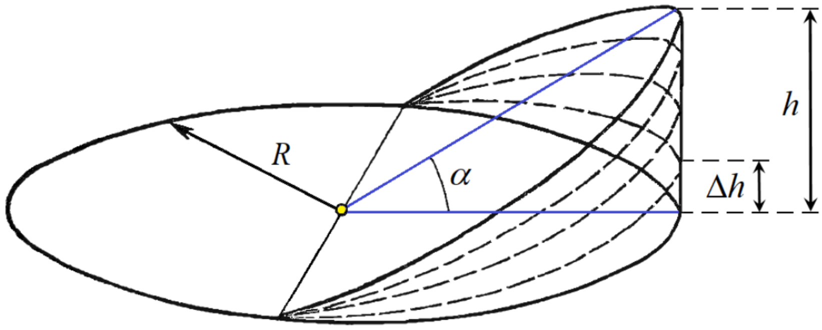
$$V_w = \frac{4}{3}\pi R^3 L \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{2}{3}R^3\alpha. \tag{7}$$

Dokładne wyrażenie na V_w można uzyskać drogą całkowania lub też, bardziej elementarnie, stosując podział wycinka walca na N ($N \gg 1$) bardzo cienkich plasterków o jednakowej wysokości Δh, a więc i jednakowej objętości (Rys. 3). Zgodnie z wyrażeniem (7) objętość najniższego plasterka wyraża się wzorem:

$$\Delta V = \frac{2}{3}R^3\frac{\Delta h}{R}. \tag{8}$$

Objętość całego wycinka walca wynosi więc:

$$V_w = N\Delta V = \frac{2}{3}R^3\frac{h}{H} = \frac{2}{3}R^3 \operatorname{tg}\alpha. \tag{9}$$



Rysunek 3: Podział wycinka walca na N ($N \gg 1$) bardzo cienkich plasterków o jednakowej wysokości $\Delta h = h/N$, $h = R \operatorname{tg} \alpha$ – do obliczenia objętości wycinka walca. Wycinek walca zastępujemy wycinkiem kuli o tym samym promieniu.

Sposób pierwszy (z obliczaniem momentu siły)

Sytuację ilustruje Rys. 2. Na wychylony z położenia równowagi walec działa para sił: siła ciężkości $\mathbf{P}$ przyłożona w punkcie S oraz siła wyporu $\mathbf{W} = -\mathbf{P}$ o zerowym momencie względem punktu S'', będącym środkiem ciężkości zanurzonej części walca[2]. Ponieważ walec jest bryłą sztywną, będziemy w uproszczeniu mówili, nawiązując do rysunku, że siła $\mathbf{W}$ jest przyłożona w punkcie S''.

Siłę tę można przedstawić z kolei jako sumę przyłożonej w punkcie S' siły wypadkowej $\mathbf{W}$ ($\mathbf{W}' = \mathbf{W}$) dla walca w położeniu pionowym oraz sił $\mathbf{F}_1$ i $\mathbf{F}_2$ przyłożonych w środkach ciężkości wycinków walca, zaznaczonych na Rys. 2. Siła $\mathbf{F}_1$ jest siłą wyporu wynikającą z zanurzenia wycinka walca OCF, siła $\mathbf{F}_2$ odpowiada wynurzonemu wycinkowi walca OED i ma tę samą wartość co $\mathbf{F}_1$, lecz przeciwny zwrot („brakujący wypór”). Tak więc działanie pary sił $(\mathbf{P}, \mathbf{W})$ o momencie $\mathbf{M}$ jest równoważne działaniu dwóch par sił: $\mathbf{P}$, $\mathbf{W}'$ o momencie $\mathbf{M}_1$ oraz sił $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ o momencie $\mathbf{M}_2$.

Warunkiem równowagi trwałej jest, aby wypadkowy moment siły $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ był niezerowy i skierowany przeciwnie do wychylenia. W celu obliczenia $\mathbf{M}$ można także zsumować moment poszczególnych sił – nie ma przy tym znaczenia, względem jakiego punktu lub osi będą one liczone (dlaczego?).

Obliczymy teraz wartość momentów $\mathbf{M}_1$ i $\mathbf{M}_2$. Wartość momentu $\mathbf{M}_1$ wyznaczamy wykorzystując wyrażenia (5) i (6):

$$M_1 = P \cdot SS' \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} g \varrho_1 \pi R^2 L^2 (1-\eta) \sin\alpha. \tag{10}$$

Dla kątów α bliskich zeru:

$$M_1 \approx \frac{1}{2} g \varrho_1 \pi R^2 L^2 (1-\eta) \alpha. \tag{11}$$

Wartość momentu $\mathbf{M}_2$ obliczamy w przybliżeniu dla małych kątów α, korzystając ze wzorów (1) i (7):

$$M_2 = 2 g \varrho_2 V_w x_m \approx \frac{1}{4} g \varrho_2 \pi R^4 \alpha. \tag{12}$$

Warunek równowagi wymaga, aby dla $\alpha > 0$ zachodziło:

$$M_1 M_2 < 0. \tag{13}$$

[2]Dowód tego oczywistego stwierdzenia nie był na zawodach wymagany.

Po podstawieniu do tej nierówności wyrażeń (6) i (7) otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} g \varrho_2 \pi R^2 L^2 \left[\eta(1-\eta) - \frac{1}{2}\frac{R^2}{L^2} \right] \alpha < 0. \tag{14}$$

Wszystkie wyrazy poza nawiasem kwadratowym są tu dodatnie, musi więc zachodzić:

$$\eta(1-\eta) - \frac{1}{2}\frac{R}{L^2} < 0, \tag{15}$$

a stąd wynika:

$$\frac{R}{L} > \sqrt{2\eta(1-\eta)}. \tag{16}$$

Ponieważ wyrażenie pod pierwiastkiem osiąga maksimum dla $\eta = 1/2$, więc na to, by dla każdej wartości był spełniony warunek równowagi trwałej, powinno zachodzić:

$$\frac{R}{L} > \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{17}$$

Sposób drugi (energetyczny)

Stan równowagi trwałej dowolnego układu mechanicznego odpowiada położeniu, w którym energia potencjalna tego układu osiąga minimum, każde bowiem wytrącenie układu z tego stanu wymaga wykonania pracy; podobna zasada obowiązuje również w pozostałych działach fizyki. Energię potencjalną układu (walec + ciecz) obliczymy, korzystając z następujących stwierdzeń:

1. Energia potencjalna E_1 walca jest taka, jakby cała masa walca była skupiona w jego środku ciężkości S (jednorodne pole grawitacyjne).
2. Energia potencjalna cieczy jest równa energii potencjalnej E_0, jaką miałaby ciecz, gdyby przestrzeń zajmowana przez zanurzoną część walca była również wypełniona cieczą, pomniejszonej o energię potencjalną E_2 cieczy wypełniającej objętość zajmowaną przez zanurzoną część walca.

Energia potencjalna rozpatrywanego układu jest więc równa:

$$E = E_0 + E_1 - E_2. \tag{18}$$

Ponieważ przy wychyleniach walca z położenia równowagi poziom cieczy się nie zmienia (albowiem stała jest objętość zanurzonej części walca), za poziom odniesienia, względem którego będziemy liczyli energię potencjalną, przyjmujemy poziom powierzchni cieczy. Oczywiście $E_0 =$ const. będąc niezależne od kąta α. Wyrażenie na $E_1(\alpha)$ uzyskujemy natychmiastowo:

$$E_1(\alpha) = P(-OS)\cos\alpha. \tag{19}$$

Energia $E_2(\alpha)$ natomiast jest równa energii potencjalnej $E(ABCD)$ cieczy wypełniającej cześć walca $ABCD$ pomniejszonej o energię potencjalną $E(DOE)$ cieczy wypełniającej wycinek walca DOE i zwiększonej o energię potencjalną $E(COF)$ cieczy wypełniającej wycinek walca COF. Ze względu na symetrię zachodzi równość:

$$E(DOE) = -E(COF). \tag{20}$$

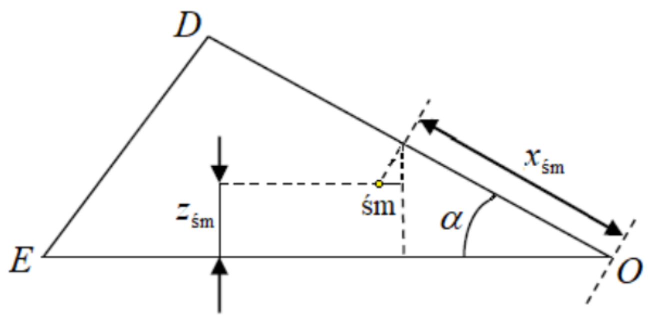
Obliczamy teraz:

$$E(DOE) = g\varrho_2 V_w z_m, \tag{21}$$

gdzie z_m jest odległością środka masy wycinka walca od powierzchni cieczy. Jak widać z Rys. 4:

$$z_m = \frac{1}{2} x_m \sin\alpha = \frac{3\pi}{32} R \sin\alpha. \tag{22}$$

i wobec tego po skorzystaniu z wyrażenia (5) mamy:



Rys. 4

$$E(DOE) = \frac{\pi}{16} g\varrho_2 R^4 \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha. \tag{23}$$

Biorąc pod uwagę, że:

$$E(ABCD) = P(-OS')\cos\alpha, \tag{24}$$

możemy napisać:

$$E(\alpha) = E_0 + E_1 - E(ABCD) + 2E(DOE) = P(OS' - OS)\cos\alpha + \frac{1}{8} g\varrho_2 \pi R^4 \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha. \tag{25}$$

Ponieważ:

$$OS' - OS = SS' = \frac{1}{2} L(1-\eta), \tag{26}$$

więc:

$$E(\alpha) = E_0 + g\varrho_1 \pi R^2 L \frac{1}{2} L(1-\eta)\cos\alpha + \frac{1}{8} g\varrho_2 \pi R^4 \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha. \tag{27}$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$E(\alpha) = E_0 + \frac{1}{2} g\varrho_2 \pi R^2 L^2 \left[\eta(1-\eta)\cos\alpha + \frac{1}{4}\frac{R^2}{L^2} \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha\right]. \tag{28}$$

Dla małych kątów wychylenia α stosujemy przybliżenia:

$$\sin\alpha \approx \alpha, \qquad \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha, \qquad \cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2, \tag{29}$$

wtedy wyrażenie (28) przyjmuje postać:

$$E(\alpha) = E_0 + \frac{1}{4} g\varrho_2 \pi R^2 L^2 \left[\frac{1}{2}\frac{R^2}{L^2} - \eta(1-\eta)\right]\alpha^2. \tag{30}$$

Ponieważ $E_0 = \text{const.}$, natomiast drugi człon powyższego wyrażenia jest kwadratową funkcją kąta α, wobec tego funkcja $E(\alpha)$ ma minimum dla $\alpha = 0$, gdy współczynnik przy α^2 jest dodatni. Stąd wynika warunek:

$$\frac{1}{2}\frac{R}{L^2} - \eta(1-\eta) > 0, \tag{31}$$

identyczny z warunkiem (15) w poprzednim rozwiązaniu. Badanie pochodnej funkcji $E(\alpha)$ w dokładnej postaci (28) prowadzi do wniosku, że również w przypadku zastąpienia znaku nierówności w (31) znakiem równości, funkcja $E(\alpha)$ ma minimum dla $\alpha = 0$. Ścisły warunek, aby pionowe położenie walca było położeniem równowagi trwałej niezależnie od rodzaju cieczy, ma więc postać:

$$\frac{R}{L} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{32}$$