XXXI OLIMPIADA FIZYCZNA

(1981/1982)

ZAWODY II STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Zadanie teoretyczne – T1

Nazwa – Prędkość kątowa krążka leżącego na obracającej się tarczy.

Źródła – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej
– Andrzej Kotlicki[1], Andrzej Nadolny[2], Krystyna Pniewska[3]: *Fizyka w Szkole* nr 4, 1982, s. 213–220
– Andrzej Nadolny, Krystyna Pniewska: *Olimpiada Fizyczna XXIX–XXXI*, WSiP, Warszawa 1986, s. 175–178
– Włodzimierz Ungier[4], Mirosław Hamera[5]: *Wybrane zadania z 43 olimpiad fizycznych*, MAGIPPA, Warszawa, 1994, zad. 47, s. 17, 76–77
– T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Pozioma, płaska tarcza obraca się wokół pionowej osi ze stałym przyspieszeniem kątowym A. W chwili, gdy prędkość kątowa tarczy wynosiła ω_0, położono na niej jednorodny, płaski krążek tak, że jego środek znajduje się na osi obrotu tarczy (i pozostaje w tej pozycji przez cały czas). Masa krążka wynosi m, jego promień – R (mniejszy od promienia tarczy). Współczynnik tarcia dynamicznego[6] między krążkiem a tarczą jest równy f. Początkowa prędkość kątowa krążka ω_0 jest równa zeru.

Wyznacz i przedyskutuj zależność prędkości kątowej krążka od czasu $\omega(t)$.

---

[1] Andrzej Kotlicki (wówczas dr) był kierownikiem organizacyjnym w KGOF od XXV OF do XXXVII OF, w tym okresie był współautorem artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF i współautorem z W. Gorzkowskim książki *Olimpiada fizyczna. Wybrane zadania doświadczalne z rozwiązaniami.* W latach 1984–1999 był sekretarzem Międzynarodowej Olimpiady Fizycznej. (Od 1991 r. – prof. University of British Columbia.) (przyp. red.)

[2] Dr Andrzej Nadolny był sekretarzem naukowym ds. zadań w KGOF od II st. XXX OF do XXXI OF, w tym okresie był współautorem artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF (przyp. red.).

[3] Krystyna Pniewska (Garbowska–Pniewska) pełniła funkcję Kierownika Organizacyjnego Olimpiady Fizycznej w XXX OF w 1981 r, w XXXIV OF i następnie, wspólnie z dr A. Kotlickim, do XXXVII OF; w tym okresie była autorką lub współatorką artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF, współautorką ww. książki (przyp. red.).

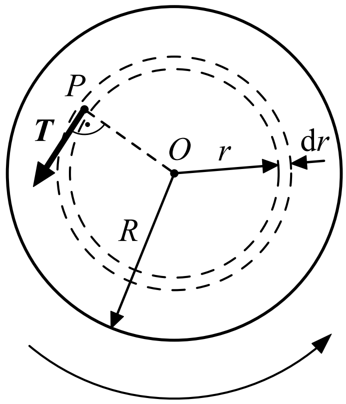
[4] Włodzimierz Ungier (wówczas dr) był sekretarzem naukowym ds. zadań teoretycznych w KGOF od XL OF do XLXIX OF, w tym okresie był współautorem artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF i ww. książki (laureat XIV OF) (przyp. red.).

[5] Dr Mirosław Hamera pełnił funkcję zastępcy Kierownika Organizacyjnego w XXXVIII i XXXIX OF, w XL OF był kierownikiem, w tym okresie był autorem artykułów w *Fizyce w Szkole* o przebiegu i wynikach OF; współautor ww. książki z zadaniami (przyp. red.).

[6] Tarcie dynamiczne – częściej stosowana nazwa to tarcie kinetyczne (przyp. red.).

Rozwiązanie zadania T1 – XXXI OF, II stopień, część teoretyczna

Ruch krążka odbywa się pod wpływem sił tarcia występujących na powierzchni styku krążka z tarczą. Wartość tych sił zależy od jednostkowego nacisku krążka na tarczę, który wynosi $mg/\pi R^2$, gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim (założyliśmy tu jednorodność siły nacisku jednostkowego w przypadku dwóch płaskich, stykających się powierzchni, co zachodzi dzięki sprężystości stykających się ciał). Działająca ze strony tarczy na dolną powierzchnię krążka siła tarcia jest w każdym punkcie P tej powierzchni prostopadła do promienia wodzącego OP względem środka podstawy krążka O (rys. 1). Punkt O leży na osi krążka, która pokrywa się z osią obrotu tarczy. Rozpatrzmy teraz element podstawy krążka w postaci wąskiego pierścienia P



T - wektor siły tarcia w punkcie P

Rys. 1

o promieniu r i szerokości dr. Podzielimy ten pierścień na dużą liczbę N jednakowych elementów. Powierzchnia takiego elementu jest równa

$$\frac{2\pi r}{N}\mathrm{d}r,$$

więc przypadająca nań siła nacisku wynosi

$$\frac{mg}{\pi r^2}\frac{2\pi r}{N}\mathrm{d}r = \frac{2mg}{NR^2}r\mathrm{d}r.$$

Wartość siły T_N działającej na omawiany element jest równa iloczynowi siły nacisku i współczynnika tarcia, a więc

$$T_N = \frac{2fmg}{NR^2}r\mathrm{d}r.$$

Odpowiednio moment siły T_N względem punktu O jest równy

$$T_N r = \frac{2fmg}{NR^2}r^2\mathrm{d}r.$$

Mnożąc to wyrażenie przez liczbę elementów N otrzymamy wyrażenie na moment siły działający na cały pierścień:

$$\frac{2fmg}{R^2}r^2\mathrm{d}r.$$

Całkowity moment M sił tarcia działających na krążek obliczamy stosując całkowanie po r:

$$M = \frac{2fmg}{R^2}\int_0^R r^2\,\mathrm{d}r = \frac{2fmg}{R^2}\frac{R^2}{3} = \frac{2}{3}fmgR.$$

Moment bezwładności krążka stanowiącego walec (względem jego osi) wynosi

$$I = \frac{1}{2}mR^2.$$

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki dla ruchu obrotowego krążek będzie więc obracał się z przyspieszeniem kątowym

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{4}{3}\frac{fg}{R}.$$

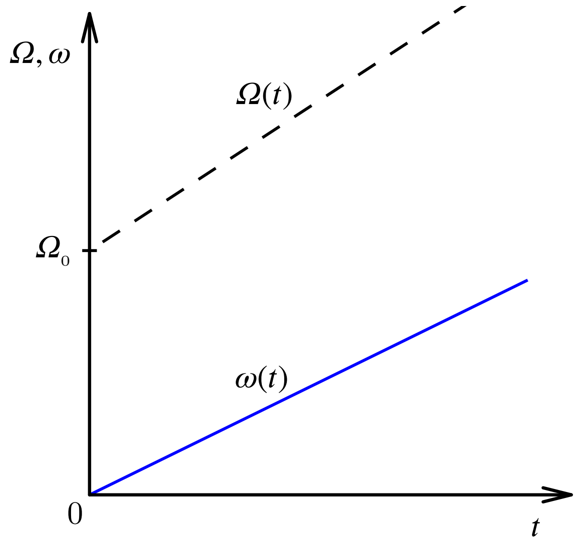
Przedyskutujemy teraz dwa możliwe przypadki ruchu krążka:
1. $\varepsilon \leqslant A$, co zachodzi dla

$$f \leqslant \frac{3}{4}\frac{RA}{g}.$$

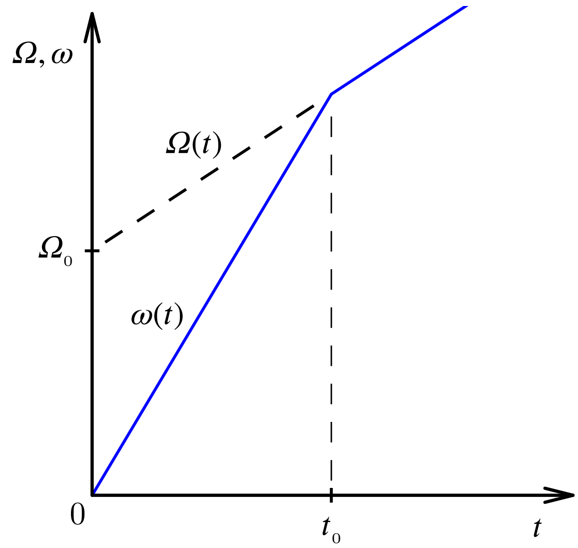
Prędkość kątowa ω krążka będzie zwiększała się w funkcji czasu t zgodnie ze wzorem

$$\omega(t) = \varepsilon t = \frac{4}{3}\frac{fg}{R}t \tag{1}$$

nigdy jednak nie dorówna prędkości kątowej $\Omega(t)$ tarczy, a więc krążek nigdy „nie dogoni" tarczy w jej ruchu obrotowym i cały czas będzie występował poślizg. Obie zależności $\omega(t)$ i $\Omega(t)$ są przedstawione na wykresie (rys. 2a).



a)



b)

Rys. 2[7]

2. $\varepsilon > A$, co zachodzi przy

$$f > \frac{4}{3}\frac{RA}{g}.$$

Prędkość kątowa krążka $\omega(t)$, opisywana początkowo wzorem (1), zrówna się po czasie t_0 z prędkością kątową $\Omega(t)$ tarczy i będzie dalej opisywana zależnością

$$\omega(t) = \Omega_0 + At.$$

Przypadek ten ilustruje wykres (rys. 2b).

Tarcie dynamiczne (związane z poślizgiem) zostanie w tej sytuacji zastąpione tarciem statycznym. Wartość t_0 obliczamy z przyrównania prędkości kątowych krążka i tarczy:

$$\varepsilon t_0 = \Omega_0 + At_0.$$

[7]Rysunki zostały częściowo pokolorowane w stosunku do zamieszczonych w źródłach (przyp. red.).

Wynika stąd

$$t_0 = \frac{\varOmega_0}{\frac{4}{3}\frac{fg}{R} - A}.$$

Punktacja

1. Obliczenie całkowitego momentu siły M działającego na krążek .... 5 pkt.
2. Obliczenie przyspieszenia kątowego ε krążka (nie jest wymagane wyprowadzenie wzoru $I = \frac{1}{2}mR^2$) .... 2 pkt.
3. Dyskusja $\omega(t)$ dla dwóch przypadków .... 3 pkt.

Komentarz

W zadaniu tym największą trudność sprawiało zawodnikom obliczenie momentu sił tarcia działających na krążek. Natomiast samo całkowanie nie stwarzało na ogół problemów. Część zawodników usiłowała rozwiązać zadanie w układzie nieinercjalnym związanym z obracającą się tarczą, tylko nielicznym udało się dojść tą – znacznie trudniejszą – drogą do poprawnego wyniku. Nie najmocniejszą stroną rozwiązań była także dyskusja.