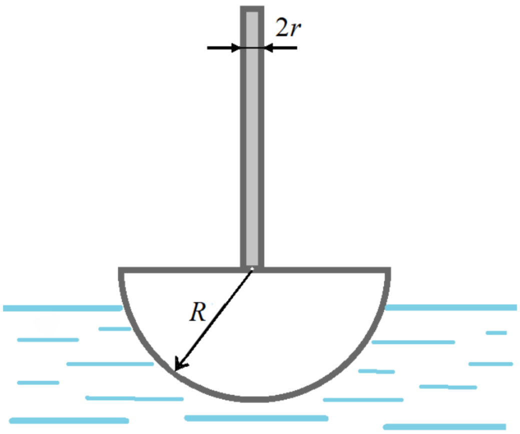
XXXI OLIMPIADA FIZYCZNA
ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Nazwa zadania Warunki pływalności i stabilności „grzybka” w cieczy.[1]
Rok 1981/1982
Źródło Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Andrzej Kotlicki, Andrzej Nadolny, Krystyna Pniewska: *Fizyka w Szkole nr 4*, 1982;
A.Nadolny, K.Pniewska: *Olimpiady Fizyczne XXIX – XXXI*, WSiP, Warszawa 1986;
Włodzimierz Ungier, Mirosław Hamera: *Wybrane zadania z 43 olimpiad fizycznych*, MAGIPPA, Warszawa 1994 – zad. 15;
T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Zadanie T3 – XXXI OF, II stopień.

Na powierzchni cieczy pływa jednorodna półkula – o promieniu R, z przymocowanym sztywno masztem, którego oś pokrywa się z osią półkuli (Rys. 1). Maszt ma przekrój kołowy o promieniu $r < R$. Gęstości materiałów, z których wykonane są maszt i półkula, wynoszą odpowiednio ϱ_m i ϱ_p. Gęstość cieczy wynosi: ϱ_c.[1]



Jaka powinna być wysokość masztu h, aby półkula nie tonęła oraz aby pionowe położenie masztu było położeniem równowagi trwałej? Jaki warunek powinna spełniać gęstość cieczy, aby maszt mógł być jak najdłuższy?

[1]podobne zagadnienia: zad. T3, III st. XXX OF; zad. dośw., II st. LXX OF.

Rozwiązanie zadania T3 – XXXI OF, II stopień.

Warunkiem pływania półkuli jest równość siły wyporu działającej na półkulę i siły ciężkości całego układu:

$$F_w = G. \tag{1}$$

Siła ciężkości układu wynosi:

$$G = M_m g + M_p g, \tag{2}$$

gdzie:

$$M_m = \pi r^2 h \varrho_m, \tag{3}$$

masa masztu, a masa półkuli wynosi:

$$M_p = \frac{2}{3}\pi R^3 \varrho_p. \tag{4}$$

Natomiast siła wyporu:

$$F_w = V' \varrho_c g, \tag{5}$$

gdzie V' objętość części zanurzonej półkuli:

$$V' \leqslant \frac{2}{3}\pi R^3. \tag{6}$$

W przypadku granicznym, gdy półkula nie tonie, a powierzchnia płaska półkuli pokrywa się z powierzchnią cieczy, mamy znak równości w wyrażeniu (6) i działa wtedy maksymalna siła wyporu. Stąd, aby półkula nie tonęła, musi być spełniony warunek:

$$M_m g + M_p g \leqslant \frac{2}{3}\pi R^3 \varrho_c g. \tag{7}$$

Po podstawieniu wyrażeń (3) i (4) otrzymamy warunek na długości masztu:

$$h \leqslant \frac{2}{3}\frac{R^3}{r^2}\frac{\varrho_c - \varrho_p}{\varrho_m} \tag{8}$$

i zależy od gęstości cieczy ϱ_c. Maksymalna długość masztu, dla której jeszcze, półkula nie tonie, wynosi:

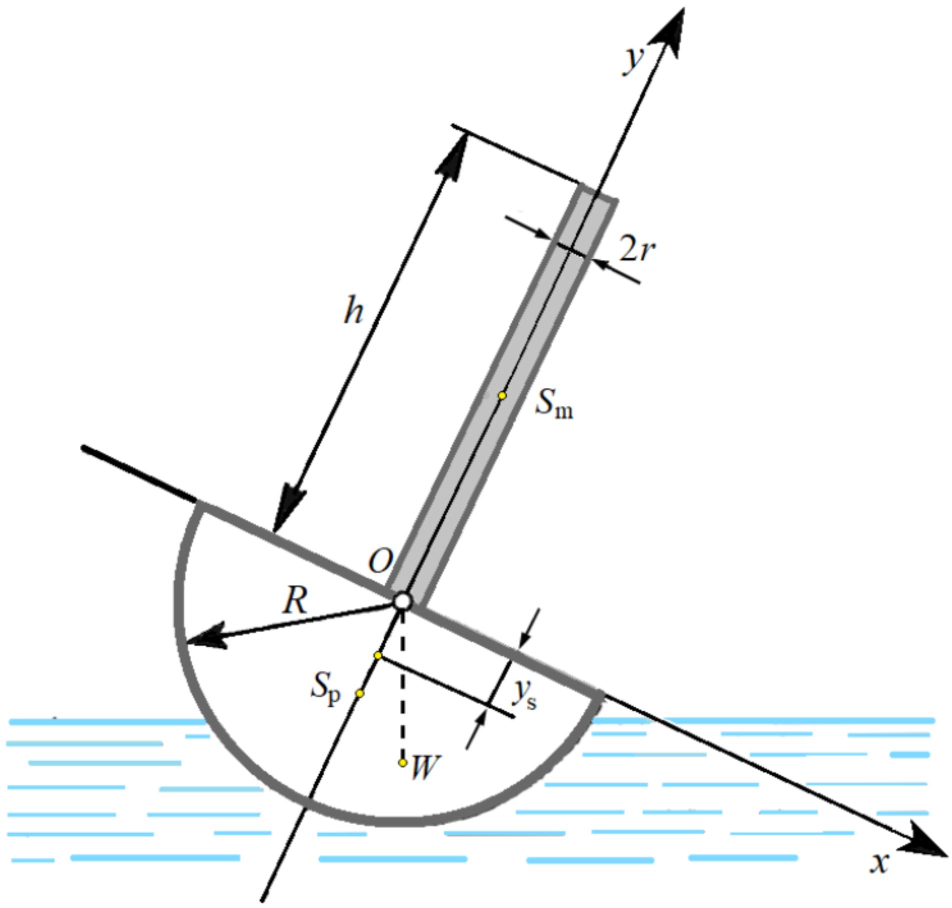
$$h'_{max} = \frac{2}{3}\frac{R^3}{r^2}\frac{\varrho_c - \varrho_p}{\varrho_m} \tag{9}$$

i zależy od gęstości cieczy ϱ_c.

Rozpatrzmy, jaki musi być spełniony warunek, aby położenie pionowe masztu było położeniem równowagi trwałej, tzn. aby układ był stabilny wobec małych wychyleń. Przyjmujemy oznaczenia takie, jak na Rys. 2: S_m – środek masztu, S_p – środek masy półkuli, S – środek masy układu półkula-maszt.

Przechylmy układ o niewielki kąt α. Nie zmienia się wtedy kształt zanurzonej części (jest to część kuli) oraz zgodnie z prawem Archimedesa objętość zanurzonej części kuli. Stąd wynika, że obrót zachodzi dookoła poziomej prostej przechodzącej przez środek kuli O.

W czasie obrotu środek ciężkości wypartej cieczy W leży zawsze dokładnie poniżej osi obrotu O i nie zmienia swojej wysokości względem na przykład powierzchni cieczy, a siła wyporu F_w – zaczepiona w punkcie W, działa zawsze pionowo do góry wzdłuż promienia kuli, jest siłą działającą radialnie. Z tego wynika, że jej wpływ na stan równowagi jest zerowy (jej moment



względem punktu O wynosi zero). Na stan równowagi ma wpływ tylko moment siły ciężkości układu. Moment ten jest prostujący (przywracający równowagę) i będzie on przeciwdziałał wychyleniu układu, gdy $y_S < 0$, tzn. punkt zaczepienia siły ciężkości będzie poniżej osi obrotu, natomiast wywracający układ, gdy $y_S > 0$.

Do takiego samego rezultatu można dojść rozpatrując położenie środka ciężkości układu. Ponieważ środek ciężkości cieczy pozostaje zawsze na takim samym poziomie (np. w stosunku do poziomu cieczy), na stan równowagi ma wpływ tylko na położenie środka ciężkości układu półkula-maszt. Jeżeli przy przechyleniu środek masy będzie się podnosił, to układ będzie dążył do powrotu do pozycji pionowej (będzie to równowaga trwała). Środek masy układu musi więc znajdować się pod osią obrotu, a więc w półkuli.

W celu wyznaczenia położenia środka masy układu półkula-maszt w stosunku do osi obrotu położonej w punkcie O konieczna jest znajomość położenia środka masy półkuli i środka masy masztu. Środek masy jednorodnej półkuli S_p znajduje się na jej osi w odległości $3R/8$ od punktu O (rozwiązanie zad. 1 stopień wstępny XXXI OF). Środek masy masztu – jednorodnego walca, S_m znajduje się w odległości $h/2$ od punktu O. Środek masy układu S znajduje się na osi półkuli i masztu w odległości y_S od punktu O i zgodnie z definicją:

$$y_S = \frac{\frac{h}{2}M_m - \frac{3}{8}RM_p}{M_p + M_m}. \tag{10}$$

Aby pionowe położenie masztu było położeniem równowagi trwałej, musi być spełniony warunek

$y_S < 0$; po podstawieniu wyrażeń (4) i (3) do (10) otrzymamy:

$$h < \sqrt{\frac{\varrho_p}{2\varrho_m}\frac{R^2}{r}}. \tag{11}$$

Rozważania powyższe były przeprowadzone przy założeniu, że kąt odchylenia α jest tak mały, że woda nie zwilża górnej powierzchni półkuli. Maksymalna długość masztu uzyskana z warunku (11):

$$h''_{max} = \frac{R^2}{r}\sqrt{\frac{\varrho_p}{2\varrho_m}}, \tag{12}$$

nie zależy od gęstości cieczy. Aby układ spełniał warunki zadania, długość masztu musi być taka, że:

$$h < h_{max} = \min(h'_{max}, h''_{max}). \tag{13}$$

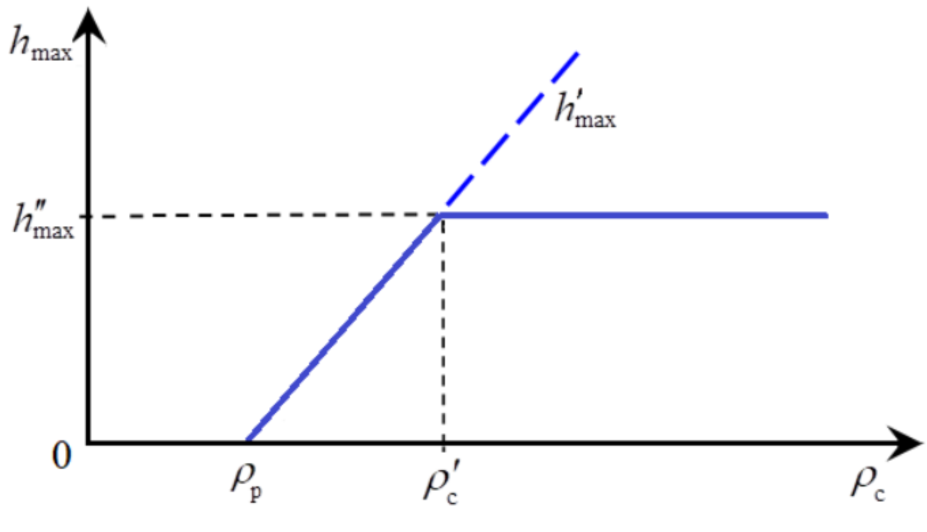
Zależność maksymalnej wysokości masztu h_{max} od gęstości cieczy ϱ_c przedstawiona jest na rysunku 3.

Należy jeszcze wyznaczyć takie ϱ_c, dla którego h jest największe tzn. warunek (9) jest bardziej ogólny od warunku (12). Ponieważ i h''_{max} (12) nie zależy od gęstości cieczy, ma to miejsce, gdy:

$$h'_{max} \geqslant h''_{max}, \tag{14}$$

stąd:

$$\varrho_c \geqslant \varrho'_c + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\varrho_p\varrho_m}{2}\frac{r}{R}}. \tag{15}$$



Uwagi

Rozwiązanie zadania wymaga przyjęcia założenia, że równowaga trwała oznacza stabilność wobec małych wychyleń oraz, że geometria części zanurzonej nie zależy od kąta wychylenia. Widać bowiem, że wychylenie „łódki” o kąt dostatecznie duży, aby część „pokładu” znalazła się poniżej poziomu cieczy, zmienia geometrię części zanurzonej i może doprowadzić do przewrócenia łódki. Należy zauważyć, że w granicznym przypadku pływalności („pokład" równy z poziomem cieczy) sytuacja ta następuje już dla dowolnie małego kąta wychylenia.

Jeżeli jako warunek stabilności układu przyjąć warunek równowagi absolutnie trwałej (równowaga układu dla dowolnych wychyleń), wówczas środek masy musi być położony poniżej punktu przyłożenia siły wyporu dla dowolnych wychyleń i zadanie jest wówczas nierozwiązalne. Rozwiązanie tego zadania sprawiło zawodnikom dużo kłopotu. Największą trudność stanowiło podanie i uzasadnienie warunku równowagi trwałej układu i wynikającego stąd warunku na długość masztu. Wielu zawodników nie umiało przeprowadzić poprawnej analizy sytuacji, gdy układ zostaje odchylony od położenia pionowego. Większość zawodników wiedziała, że decydującą rolę odgrywa tu położenie środka ciężkości układu półkula – maszt, ale nie potrafiła w pełni uzasadnić konieczności jego położenia wewnątrz półkuli. Natomiast większość zawodników potrafiła wyznaczyć długość masztu, dla której półkula jeszcze nie tonie, niewielu jednak łączyło poprawnie oba warunki i dyskutowało otrzymany wynik, wyznaczając warunek na gęstość cieczy.

Zadanie okazało się zadaniem ciekawym, zmuszającym do interpretacji uzyskanych wyników, dobrze różnicującym zawodników. (Tylko 10% zaw. uzyskało punktację powyżej 16 pkt na 20 pkt możliwych.)