XXXI OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP WSTĘPNY
Zadanie teoretyczne

Rozwiąż dowolnie przez siebie wybrane dwa zadania spośród poniższych trzech:

ZADANIE T3

Nazwa zadania:

A. Oblicz moment bezwładności jednorodnego stożka prostego o masie M, promieniu podstawy R i wysokości H względem osi przechodzącej przez środek podstawy i wierzchołek.

B. Z dużej odległości fotografujemy kulę świecącą jako ciało doskonale czarne (kulą taką może być np. Słońce), otrzymując na błonie krążek o pewnej średnicy. Zakładamy, że każdy punkt powierzchni kuli ma tę samą temperaturę.

Czy zaczernienie krążka na błonie (negatywie) we wszystkich punktach będzie takie samo? Dyfrakcję i dyspersję zaniedbujemy.

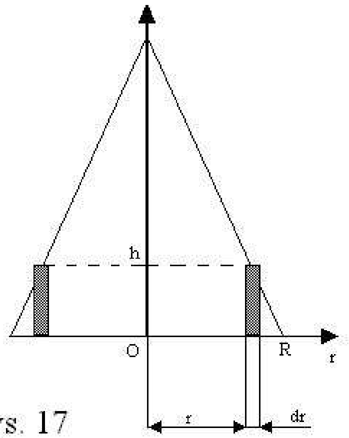
C. na każdej granicy faz istnieje napięcie powierzchniowe podobne do napięcia powierzchniowego na powierzchni rozdzielającej ciecz i powietrze. W przypadku ciał anizotropowych, takich jak na przykład kryształy, wartość tego napięcia na różnych ścianach może być różna. Załóżmy, że mamy kryształ w postaci idealnego sześcianu znajdujący się w roztworze nasyconym substancji tworzącej kryształ. Niech napięcia powierzchniowe na dwu przeciwległych pionowych ścianach kryształu będą równe σ_1, a na pozostałych czterech ścianach $\sigma_2 \neq \sigma_1$. Zakładamy, że temperatura kryształu i roztworu jest taka sama i że roztwór otacza kryształ ze wszystkich stron (gęstość kryształu jest równa gęstości roztworu).

Czy układ (kryształ + roztwór) znajduje się w równowadze termodynamicznej?

ROZWIĄZANIE ZADANIA T3

A. zastosujemy najpierw typową metodę obliczania momentów bezwładności brył polegającą na całkowaniu po objętości bryły, a potem pokażemy jak można rozwiązać to zadanie bez pomocy rachunku całkowego.

W pierwszym sposobie rozwiązania dzielimy stożek na cylindry o bardzo małej grubości ścian dr (rys. 17). Cała masa takiego cylindra znajduje się praktycznie w odległości r od osi stożka (r – promień podstawy cylindra), wobec tego jego moment bezwładności oblicza się bardzo prosto. Przejdźmy zatem do obliczeń.



Rys. 17

Na wstępie znajdziemy wyrażenie na gęstość stożka. Ponieważ objętość stożka wynosi $\frac{1}{3}\pi R^2 H$, zatem gęstość jest równa

$$\rho = \frac{3M}{\pi R^2 H} \qquad (1)$$

Objętość cylindra V obliczamy mnożąc pole jego podstawy $2\pi r dr$ przez wysokość, która wynosi $h = H\left(1 - \frac{r}{R}\right)$:

$$V = 2\pi H\left(1 - \frac{r}{R}\right) r dr$$

Masa cylindra jest więc równa

$$m = \rho V = 2\pi\rho H\left(1 - \frac{r}{R}\right) r dr$$

a po podstawieniu wyrażenia (1) na ρ:

$$m = 6M\frac{1}{R^2}\left(1 - \frac{r}{R}\right) r dr$$

Moment bezwładności omawianego cylindra jest zatem równy

$$i = mr^2 = 6M\frac{1}{R^2}\left(1 - \frac{r}{R}\right) r^3 dr$$

Promień r cylindrów, na które „rozkładamy” stożek zmienia się w granicach od 0 do R (promień podstawy stożka). Moment bezwładności stożka obliczamy zatem jako całkę:

$$I = \int_0^R i(r)\,dr = \frac{6M}{R^2}\int_0^R\left(1 - \frac{r}{R}\right) r^3 dr = \frac{6M}{R^2}\left(\int_0^R r^3 dr - \frac{1}{R}\int_0^R r^4 dr\right) = \frac{6M}{R^2}\left(\frac{R^4}{4} - \frac{1}{R}\frac{R^5}{5}\right) = \frac{3}{10}MR^2$$

Widać, że moment bezwładności stożka względem osi przechodzącej przez środek podstawy i wierzchołek nie zależy od jego wysokości ani od stosunku wysokości do promienia podstawy.

A teraz podamy rozwiązanie zadania, wykorzystując analizę wymiarową. Moment bezwładności ma wymiar

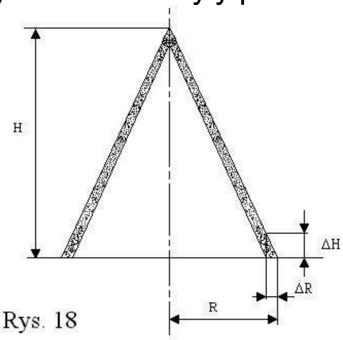
$$[\text{masa}]\cdot[\text{długość}]^2$$

Wśród danych mamy masę M oraz dwie długości: R i H. Możemy zatem przyjąć następujący wzór na moment bezwładności

$$I = aMR^2 f\left(\frac{H}{R}\right) \qquad (2)$$

Gdzie a jest stałą liczbową, zaś $f(H/R)$ bezwymiarową funkcją stosunku H/R (można sprawdzić, że np. wyrażenie $aMRHf(H/R)$ byłoby równoważne wyrażeniu (2).

Stożek możemy „rozłożyć” na dwie bryły przedstawione na rysunku 18: stożek



Rys. 18

nieco mniejszy od stożka pierwotnego, ale doń podobny oraz „pokrywę stożkową” (zakropkowana na rysunku). Moment bezwładności stożka jest oczywiście sumą momentów bezwładności tych dwóch brył.

Moment bezwładności „pokrywy” jest taki sam, jak płyty kolistej o promieniu R i grubości ΔH. Przy założeniu, że ΔH i ΔR są małe, mamy:

$$I_p = \frac{1}{2}\rho\pi R^4 \Delta H = \frac{3}{2} M \frac{\Delta H}{H} R^2$$

Ponieważ

$$\Delta H = \frac{H}{R}\Delta R$$

zatem

$$I_p = \frac{3}{2} MR\Delta R$$

(3)

Wyrażenie na moment bezwładności stożka „zmniejszonego” otrzymujemy podstawiając do wzoru (2) odpowiednio zmniejszone wymiary oraz masę:

$$I_s = a\rho\pi \frac{1}{3}(R-\Delta R)^2 (H-\Delta H)(R-\Delta R)^2 f\left(\frac{H}{R}\right)$$

Korzystając ze wzoru (1) uzyskujemy

$$I_s = a\frac{M}{R^2 H}(R-\Delta R)^4 (H-\Delta H) f\left(\frac{H}{R}\right) \qquad (4)$$

Po podstawieniu wyrażeń, (2),(3) i (4) do oczywistego wzoru $I = I_p + I_s$ otrzymujemy równanie zawierające wyrazy z $\delta = \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta H}{H}$ w różnych potęgach.

Przy założeniu $\delta >> 1$ odrzucamy wyrazy z $\delta^2, \delta^3, \delta^4$ jako bardzo małe i uzyskujemy

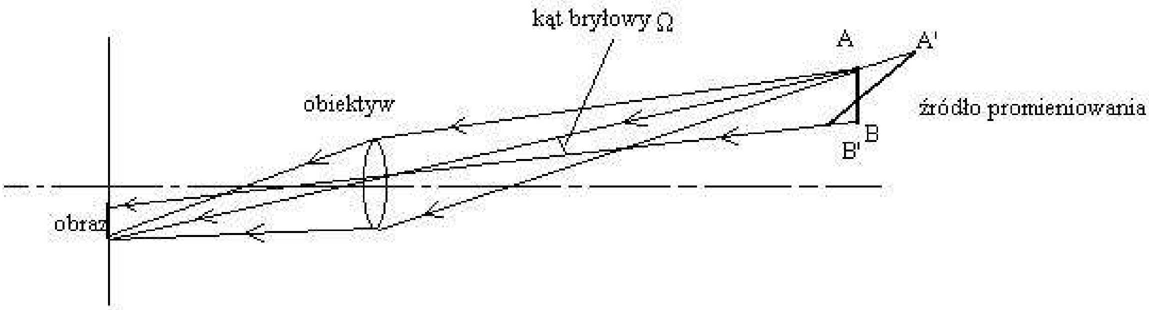
$$af\left(\frac{H}{R}\right) = \frac{3}{10}$$

A więc

$$I = \frac{3}{10} MR^2$$

Jak w poprzednim rozwiązaniu.

B. Jak widać z rysunku 19, kąt bryłowy Ω, pod jakim widać obraz ze środka soczewki (obiektywu), jest równy kątowi, pod jakim z tego punktu widać przedmiot.



Rys. 19

Jasność obrazu (zaczernienie negatywu) będzie proporcjonalne do ilości światła przypadającej na jednostkę kąta bryłowego Ω, a więc na jednostkę powierzchni obrazu (obraz jest mały, bo przedmiot znajduje się w dużej odległości).

Problem sprowadza się do tego czy, element $A'B'$ powierzchni ciała świecącego wyśle w kierunku obiektywu aparatu więcej światła niż nachylony pod innym kątem element AB tej powierzchni, któremu odpowiada taka sama powierzchnia obrazu. Ponieważ pole powierzchni elementu $A'B'$ jest większe od pola powierzchni elementu AB, można by sądzić, że odpowiadający mu obraz będzie jaśniejszy (w takim przypadku obraz kuli byłby jaśniejszy przy brzegach). W rzeczywistości tak jednak nie jest. Ciało doskonale czarne promieniuje tak samo, jak otwór we wnęce z promieniowaniem. Ponieważ w takiej wnęce promieniowanie jest całkowicie izotropowe, zatem strumień światła (strumień fotonów) emitowany w kierunku obiektywu jest w przypadku elementów powierzchni AB i $A'B'$ - traktowanych teraz jako otwory we wnęce - jednakowy.

W konkluzji: zaczernienie obrazu świecącej kuli na negatywie będzie we wszystkich punktach takie samo.

C. Z założenia, że roztwór jest nasycony, wynika, że objętość kryształu jest stała (zmiany objętości, a więc i masy kryształu pociągnęłyby za sobą zmianę stężenia roztworu przy stałej ilości rozpuszczalnika).

Na to, aby układ znajdował się w równowadze termodynamicznej jego energia swobodna powinna być minimalna. Przy założeniu, że gęstości kryształu i roztworu są równe, wystarczy rozpatrzyć energię związaną z napięciem powierzchniowym. Gdyby napięcie powierzchniowe było dla wszystkich ścian kryształu jednakowe, minimum energii odpowiadałoby minimalnej powierzchni, co przy stałej objętości kryształu zachodzi w przypadku sześcianu (kula nie może być ze względu na założenie dotyczące kryształu).

Rozpatrzmy teraz podaną w zadaniu sytuację nierównoważnych ścian. Przyjmiemy, że dwie z nich – o napięciu powierzchniowym σ_1 - są kwadratami o boku a, natomiast pozostałe cztery – o napięciu powierzchniowym σ_2 - prostokątami o bokach a oraz c: boki a występują na styku ścian o napięciu powierzchniowym σ_1 i σ_2, boki c – na styku ścian o napięciu powierzchniowym σ_2.

Całkowita energia związana z napięciem powierzchniowym wynosi

$$E = 2a^2\sigma_1 + 4ac\sigma_2 \qquad (1)$$

Interesuje nas, dla jakich wartości a energia ta osiąga minimum przy spełnionym warunku

$$a^2 c = V \qquad (2)$$

gdzie V jest objętością kryształu.

Wyrażenie (1) po uwzględnieniu warunku (2) przyjmuje postać

$$E = 2a^2\sigma_1 + 4\frac{V}{a}\sigma_2$$

Aby znaleźć minimum tej funkcji obliczmy pochodną

$$\frac{dE}{da} = 4a\sigma_1 - 4\frac{V}{a^2}\sigma_2$$

Z przyrównania tej pochodnej do zera otrzymujemy wartość a, dla której wystąpi ekstremum energii E:

$$a = \sqrt[3]{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}V}$$

Aby się przekonać, że jest to istotnie minimum obliczmy drugą pochodną

$$\frac{d^2E}{da^2} = \frac{d}{da}\left(\frac{dE}{da}\right) = 4\sigma_1 + 8\frac{V}{a^3}\sigma_2 \rangle 0$$

Dodatnia wartość drugiej pochodnej świadczy, że mamy do czynienia z minimum funkcji.

Ze wzoru (3) wynika, że tylko dla $\sigma_1 = \sigma_2$ zachodzi $a = \sqrt[3]{V}$ i sześcianowi odpowiada minimum energii swobodnej. Jeśli natomiast $\sigma_1 \neq \sigma_2$ (jak założono w treści zadania) minimum energii wystąpi dla niesześciennego kryształu. Znaczy to, że omawiany układ nie znajduje się w równowadze termodynamicznej.

Stężenie roztworu pozostającego w równowadze z kryształem jest w istocie różne dla ścian o różnych wartościach napięcia powierzchniowego. Dzięki temu na pewnych ścianach będzie zachodziło rozpuszczanie kryształu, na innych – jego wzrost i dzięki temu w omawianej sytuacji kryształ będzie zmieniał kształt. Pojęcie roztworu nasyconego odnosi się tu do całego układu (kryształ + roztwór) i ma sens podany na początku rozwiązania.

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Olimpiada fizyczna XXIX i XXXI”
Autor: A. Nadolny, K. Pniewska,
WSiP 1986

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl