

# XXXII OLIMPIADA FIZYCZNA

(1982/1983)

## ZAWODY II STOPNIA

### CZĘŚĆ DOŚWIADCZALNA

#### Zadanie doświadczalne – D

**Nazwa** – Wyznaczanie masy lejka i ciężarka wykorzystując zjawisko ruchu lejka na poduszce wodnej.

**Źródła** – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej

– Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki: *Fizyka w Szkole* nr 4, 1983

– T.M. Molenda, IF US, [www.OF.szc.pl](http://www.OF.szc.pl).

---

Mając do dyspozycji:

1. lejek,
2. płaską szybę,
3. metalowy ciężarek,
4. menzurkę,
5. naczynie z wodą,
6. kuwetę lub tacę (chroni przed zalaniem pracowni),
7. papier milimetry,
8. klej (do przyklejenia papieru milimetry),

wyznacz masę lejka oraz ciężarka (gęstości ciężarka i lejka są nieznane). Gęstość wody wynosi  $1 \text{ g/cm}^3$ .

## Rozwiązanie zadania D – XXXII OF, II stopień

Do doświadczenia przygotowano lejek szklany o średnicy przy podstawie około 10 cm (masa lejka około 100 g), szklaną płytkę o wymiarach około 15 cm × 15 cm, ciężarek z otworem o masie ok. 50 g (np. nakrętka o takiej średnicy wewnętrznej, żeby weszła na rurkę lejka). Powierzchnia krawędzi górnej lejka była doszlifowana proszkiem szlifierskim w taki sposób, aby lejek położony na szybie dał się napełnić wodą do pewnego określonego poziomu.

Lejek stawiamy na poziomej szybie i zaczynamy powoli wypełniać go wodą. Woda wywiera na podłożu parcie, które rośnie wraz ze wzrostem wysokości słupa wody zawartej w lejku. Przy pewnym poziomie wody  $h$ , obserwujemy płynięcie lejka spowodowane silnym zmniejszeniem oporu ruchu lejka po podłożu – znika tarcie między lejkiem a płytką. Przy odpowiednim doszlifowaniu krawędzi lejka wartość  $h$  jest dobrze określona.

W tym momencie suma ciężaru lejka i ciężaru zawartej w nim wody równa jest całkowitemu parciu wody na powierzchnię podstawy lejka.

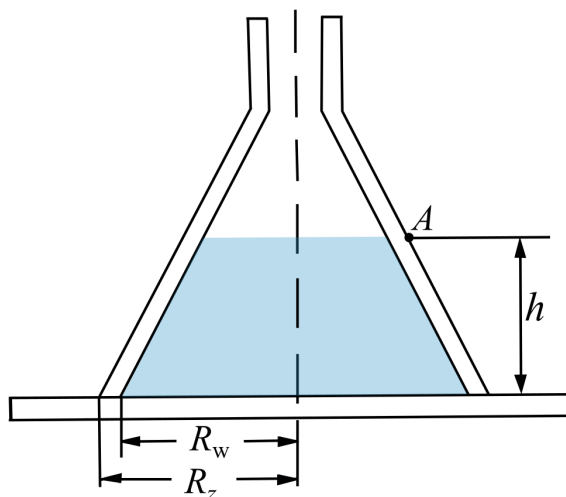
Parcie  $Q$  na całej wewnętrznej powierzchni podstawy lejka równe jest iloczynowi ciśnienia wody  $p_w$  przez powierzchnię:

$$Q = p_w \cdot R_w^2 \pi, \quad (1)$$

gdzie  $R_w$  – promień wewnętrznej podstawy lejka (rys. 1). Ciśnienie na tej powierzchni wynosi

$$p_w = \rho_w \cdot g \cdot h, \quad (2)$$

gdzie:  $\rho_w$  – gęstość wody,  $g$  – przyspieszenie ziemskie,  $h$  – wysokość słupa wody w lejku, przy której następuje „płynięcie” lejka.



Rys. 1. Układ pomiarowy do wyznaczenia masy lejka oraz ciężarka

Jeżeli założymy, że pod brzegiem lejka wzdłuż promienia jego podstawy od  $R_w$  do  $R_z$  ciśnienie zmienia się liniowo od wartości  $p_w$  do zera, to dodatkowe parcie wody  $Q'$  między brzegiem lejka a płytką będzie wynosiło

$$Q' = \left( \pi R_z^2 - \pi R_w^2 \right) \frac{p_w}{2}. \quad (3)$$

Całkowite parcie wody na powierzchnię podstawy lejka wynosi więc  $Q + Q'$  i równe jest sumie

ciężarów lejka  $P_L$  i zawartej w nim wody  $P_w$ , stąd

$$Q + Q' = P_L + P_w. \quad (4)$$

Korzystając z zależności (1), (2), (3) otrzymamy:

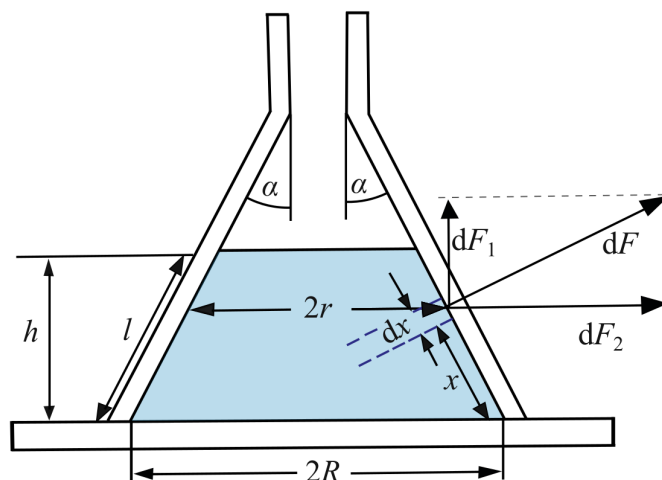
$$\left[ \pi R_w^2 + \left( \frac{\pi R_z^2}{2} - \frac{\pi R_w^2}{2} \right) \right] \rho_w g h = P_L + P_w. \quad (5)$$

Stąd

$$P_L = \pi \rho_w g h \cdot \left( \frac{R_z^2 + R_w^2}{2} \right) - P_w. \quad (6)$$

Do innej metody otrzymania wzoru na wyznaczenie ciężaru lejka, przy zastosowaniu danego układu pomiarowego, prowadziło stwierdzenie, że w momencie pływania lejka, przy pewnej wysokości  $h$  wody zawartej w lejku, składowa pionowa siły parcia wywieranego przez wodę równoważy ciężar lejka. (Składowe poziome siły parcia równoważą się ze względu na symetrię układu). Należało więc obliczyć składową pionową siły i parcia wywieranego przez wodę na element ds ścianki lejka i scałkować po całej powierzchni lejka.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rys. 2. Rozpatrujemy element powierzchni lejka o szerokości  $dx$ , położony w odległości  $x$  (liczonej wzdłuż tworzącej stożka) od krawędzi lejka przylegającej do szyby.



Rys. 2

Całkowite parcie wody na ten element powierzchni wynosi:

$$dF = p \cdot ds, \quad (7)$$

gdzie:  $p$  – ciśnienie słupa wody na wysokości  $(l - x) \cos \alpha$ ,  $ds$  – element powierzchni. Ponieważ ciśnienie  $p$  wynosi

$$p = \rho_w g (l - x) \cos \alpha, \quad (8)$$

element powierzchni

$$ds = 2\pi r dx, \quad \text{gdzie } r = R - x \cdot \sin \alpha, \quad (9)$$

więc

$$dF = \rho_w g(l - x) \cos \alpha \cdot 2\pi(R - x \cdot \sin \alpha) dx. \quad (10)$$

Składowa pionowa tej siły  $dF_1$  wynosi

$$dF_1 = dF \cdot \sin \alpha = 2\pi\rho_w g(l - x) \cos \alpha (R - x \cdot \sin \alpha) \sin \alpha \cdot dx. \quad (11)$$

Całkowita wartość składowej pionowej siły parcia wody na ściankę lejka wynosi wobec tego:

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_0^l dF_1 = 2\pi\rho_w g \cos \alpha \sin \alpha \int_0^l (R - x \sin \alpha) \cdot (l - x) dx = \\ &= 2\pi\rho_w g \cos \alpha \sin \alpha \left[ \int_0^l R l dx - \int_0^l (R + l \sin \alpha) x dx + \int_0^l \sin \alpha x^2 dx \right] = \\ &= 2\pi\rho_w g \cos \alpha \sin \alpha \left[ Rl^2 - (R + l \sin \alpha) \frac{l^2}{2} + \sin \alpha \frac{l^3}{3} \right] = \\ &= 2\pi\rho_w g \cos \alpha \sin \alpha \left[ \frac{Rl^2}{2} - \frac{1}{6} l^3 \sin \alpha \right]. \end{aligned}$$

Zgodnie z poprzednimi rozważaniami  $F_1 = P_L$ , więc stąd

$$P_L = \pi\rho_w g \cdot \sin \alpha \cos \alpha \cdot l^2 \left[ R - \frac{1}{3} l \sin \alpha \right]. \quad (12)$$

Łatwo sprawdzić, że wzór ten jest równoważny wzorowi (5) przy założeniu, że  $R_z = R_w$ , tzn. przy zaniedbaniu grubości ścianek lejka.

Najczęstsze błędy popełniane przez zawodników, stosujących tę metodę wyprowadzenia wzoru to:

1. Wstawianie do wzoru na ciśnienie wody odległości elementu  $ds$  od poziomu płytki, a nie od poziomu cieczy.
2. Przy obliczaniu składowej pionowej siły parcia mnożenie „średniego” ciśnienia na powierzchni lejka (najczęściej  $\rho gh/2$ ) przez powierzchnię boczną lejka. Takie postępowanie jest błędne, ponieważ jak widać z poprzednio wyprowadzonych wzorów, zależność  $dF$  od wysokości  $h$  nie jest liniowa.
3. Niezauważenie, że promień  $r$  elementu powierzchni  $ds$ , nie jest stały, ale zależy od  $x$ , wobec czego całkowanie z  $r = R$  jako stałą.
4. Liczne omyłki przy rozwiązywaniu trójkątów prostokątnych m.in. mylenie funkcji trygonometrycznych.
5. Błędy w całkowaniu.

Opisana wyżej metoda została zastosowana przez większość zawodników.

Oznaczając masę lejka przez  $M_L$  otrzymujemy

$$M_L = \pi\rho_w \sin \alpha \cos \alpha \cdot l^2 \left[ R - \frac{1}{3} l \sin \alpha \right] \quad (13)$$

lub zgodnie ze wzorem (5) oraz z zależnością  $h = l \cdot \cos \alpha$  otrzymamy:

$$M_L = \pi \rho_w l \cos \alpha \left( \frac{R_w^2 + R_z^2}{2} \right) - \frac{P_w}{g}. \quad (14)$$

Wzór (11) lub (12) pozwala wyznaczyć masę lejka i masę układu lejek + ciężarek na podstawie pomiaru długości  $l$  oraz parametrów lejka, tzn.  $R$  oraz kąta  $\alpha$  lub pomiaru masy wody.

Wielkości  $l$ ,  $R_w$ ,  $R_z$  mierzono przy pomocy papieru milimetrowego. Aby ułatwić odczytanie poziomu cieczy na lejku naklejono wzdłuż tworzącej stożka pasek papieru milimetrowego spełniający rolę skali. Wewnętrzny i zewnętrzny promień krawędzi lejka łatwo było zmierzyć odciskając zwilżony lejek na papierze milimetrowym. Kąt  $\alpha$  wyznaczano z pomiaru promienia i tworzącej części stożkowej lejka. Najskuteczniejszą metodą było zwiniecie stożka (nie ściętego) z papieru milimetrowego i wpasowanie go do wewnętrznej części lejka. Kąt  $\alpha$  wyznaczano również poprzez pomiar objętości  $V$  cieczy wypełniającej całkowicie „kielich” lejka zgodnie z zależnością

$$V = \frac{1}{3} \pi R^3 \operatorname{ctg} \alpha, \quad (15)$$

stąd

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3V}{\pi R^3}. \quad (16)$$

Masę wody ( $P_w/g$ ) wyznaczono odmierzając odpowiednio objętość wody menzurką. Najłatwiej to wykonać w następujący sposób: trzymając lejek podstawą do góry i zatykając wylot palcem napełniamy lejek do punktu  $A$  (widocznego na rys. 1), a następnie mierzymy objętość wody potrzebną do napełnienia lejka po brzegi.

Opisane powyżej metody opierają się na obserwacji tego samego zjawiska i różnią się szczegółami otrzymywania odpowiednich wzorów lub wyborem mierzonych wielkości.

### Proponowana punktacja

1. Metoda pomiaru ..... do 4 pkt.
2. Wyprowadzenie wzoru na  $P_L$  ..... do 5 pkt.
3. Uwzględnienie poprawki  $Q'$  ..... do 4 pkt.
4. Wykonanie pomiarów i otrzymanie prawidłowych wyników ..... do 5 pkt.
5. Pomiar parametrów lejka ..... do 2 pkt.
6. Dyskusja błędów<sup>1</sup> i statystyka pomiarów ..... do 3 pkt.

### Komentarz

Wielu uczniów szukało innych, skutecznych metod rozwiązania nie zawsze z pomyslnym wynikiem.

<sup>1</sup>Błąd, tutaj rozumiany jako błąd pomiaru - określenie było stosowane w znaczeniu obecnej niepewności pomiaru.

Problematykę tą od 1993 r. reguluje *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, u nas w nauczaniu od 2018 r. *Rekomendacja Polskiego Towarzystwa Fizycznego dotycząca nauczania o opracowywaniu wyników pomiarów w szkołach* – [www2022.ptf.net.pl/programy/edukacja/rekomendacja](http://www2022.ptf.net.pl/programy/edukacja/rekomendacja) (przyp. red.).

Ogólnie zadanie wypadło dobrze, wielu zawodników uzyskało ponad 15 punktów na 20 możliwych. Niewątpliwie jest to mocno „udziwniona” metoda pomiaru masy, ale samo zjawisko ruchu lejka na „poduszce” wodnej było chyba warte pokazania.