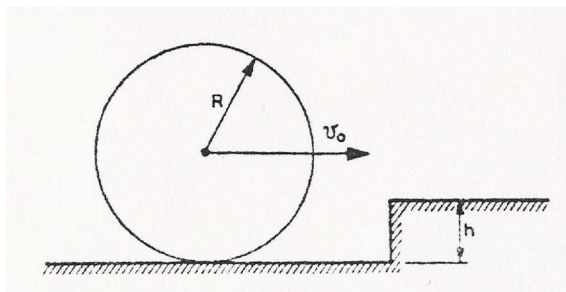
XXXII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP III
Zadanie teoretyczne

Zadanie T2

Nazwa zadania: „Wtaczanie piłki na krawężnik"

Na poziomej, gładkiej płaszczyźnie znajduje się próg o wysokości h (ryc. 7). Prostopadle do progu sunie bez tarcia ruchem postępowym sztywna kula o promieniu R i prędkości v_o.

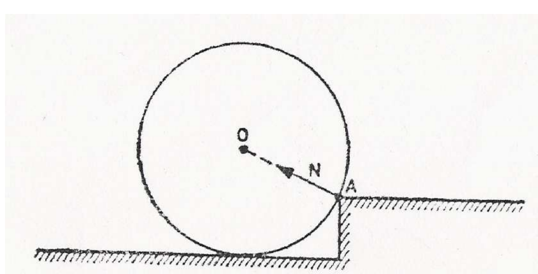


Ryc. 7

Jaki musi być charakter zderzenia i jakie warunki ograniczające spełniać muszą parametry v_o., h, R i g (przyspieszenie ziemskie), by kula wspięła się całkowicie na próg i kontynuowała ewentualnie swój ruch bez choćby chwilowej straty kontaktu z podłożem lub progiem. Zakładamy, że kula i próg są idealnie gładkie, to znaczy, że siły kontaktowe są zawsze prostopadłe do kuli w miejscu styku. Przyjmujemy też, że próg nie ulega odkształceniu.

ROZWIĄZANIEZADANIA T2

W czasie zderzenia na kulkę działa siła reakcji ***N*** progu, Siła ta działa w kierunku ***AO*** - ryc. 8. Dynamiką bryły sztywnej rządzi prawo zmian pędu i momentu pędu.

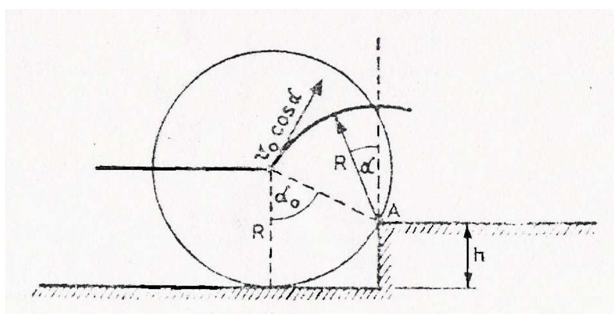


Ryc. 8

Popęd siły ***N*** może zmienić tylko składową prędkości w kierunku ***OA***. Na to, by kula ani na chwilę się nie oderwała, jej prędkość w tym kierunku po zderzeniu musi być równa zeru. Zderzenie musi więc być niesprężyste. Po zderzeniu z prędkości v_o pozostaje więc tylko jej składowa prostopadła do ***OA*** o wartości $v_0 \cos\alpha$, gdzie α oznacza kąt jaki ***OA*** tworzy z pionem.

Siła reakcji ***N*** ma znikający moment względem środka kuli. Wynika stąd, że podczas zderzenia prędkość kątowa kuli nie ulegnie zmianie. Jeżeli kula obracała się względem jakiejś osi z prędkością ω, to po zderzeniu będzie obracała się względem tej samej osi z tą samą prędkością kątową. Jeżeli przed zderzeniem prędkość kątowa kuli była równa zeru, to i po zderzeniu będzie równa zeru. Po prostu ze względu na znikający moment sił działających na kulkę, jej ruch obrotowy nie ulegnie zmianie i można go zupełnie nie rozpatrywać.

Tak więc ruch kuli możemy opisywać rozważając ruch jej środka masy. W drugiej fazie ruchu, tj. po "wygaszeniu" składowej prędkości równoległej do ***OA****,* środek kuli musi poruszać się po okręgu o promieniu *R* i środku w A. Nie oznacza to jednak, że kula jako całość obraca się wokół *A.* Kula styka się z progiem coraz to innym punktem sunąc (zgodnie z treścią zadania) skośnie w górę i jednocześnie opadając pod wpływem grawitacji i siły reakcji ***N***. Ruch punktu po okręgu był już wykorzystywany w zadaniach olimpijskich; zrezygnujemy z części objaśnień.



Ryc. 9

Przyjmijmy oznaczenia takie, jak na ryc.9. Mamy:

$$\cos\alpha_0 = \frac{R-h}{R}$$

$$\frac{v^2(\alpha)}{2} + g\ (h + R\cos\alpha) = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha_0}{2} + gR$$

$$\frac{v^2(\alpha)}{R} - g\cos\alpha - N/m \text{ , N} \geq 0$$

Pierwsza zależność, to zwykły związek trygonometryczny. Druga zależność wyraża prawo zachowania energii mechanicznej w drugiej fazie ruchu. Trzeci wzór to prawo dynamiki dla ruchu po okręgu. Ostatni zaś wzór wyraża fakt, że kula nie może oderwać się od krawędzi progu w czasie wspinania się na próg.

Przy wznoszeniu się w górę v maleje a cos α rośnie. Jeżeli więc na początku tj. tuż po wytraceniu składowej prędkości równoległej do ***OA,*** zachodzi związek *N* ≥ O, to związek ten będzie zachodził tym bardziej i potem, aż do chwili gdy α stanie się równe zeru. Wynika to z trzeciego wzoru, która dla większej czytelności można napisać w postaci

$$\frac{N}{m} = g\cos\alpha - \frac{v^2}{R}$$

Jako pierwszy warunek otrzymujemy więc zależność

$$g\cos\alpha_0 \geq \frac{v^2(\alpha_0)}{R}$$

czyli

$$g\cos\alpha_0 \geq \frac{v_0^2\cos^2\alpha_0}{R}$$

co można zapisać jako

$$v_0^2 \leq \frac{gR^2}{R-h} \quad (1)$$

Aby kula wspięła się całkowicie na próg, trzeba jej dostarczyć odpowiednio dużej energii kinetycznej. Energia kinetyczna na początku drugiej fazy ruchu musi być większa od zmiany energii potencjalnej związanej ze wspięciem się na próg. Zatem

$$\frac{v_0^2\cos^2\alpha_0}{2} \geq g\,h$$

czyli

$$v_0^2 \geq \frac{2gh\,R^2}{(R-h)^2} \qquad (2)$$

Warunki (1) i (2) będą niesprzeczne tylko wtedy, gdy

$$\frac{2ghR^2}{(R-h)^2} \leq \frac{gR^2}{R-h}$$

czyli gdy

$$h \leq \frac{R}{3} \qquad (3)$$

Tak więc zderzenie kuli z progiem musi być zderzeniem niesprężystym, wysokość progu nie może przekraczać 1/3 *R,* a prędkość kuli nie może być ani za duża, ani za mała, zgodnie z warunkami (1) i (2).

Punktacja:

1) Wykazanie, że zderzenie musi być niesprężyste 2pkt.
2) Warunek na ruch po okręgu 3pkt.
3) Warunek na energię 2pkt.
4) Niesprzeczność otrzymanych warunków 2pkt.
5) Zauważenie, że ruch obrotowy kuli nie zmienia się
   podczas zderzenia 1pkt.

Źródło:
Zadanie pochodzi z czasopisma „Fizyka w Szkole”

Komitet Okregowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl