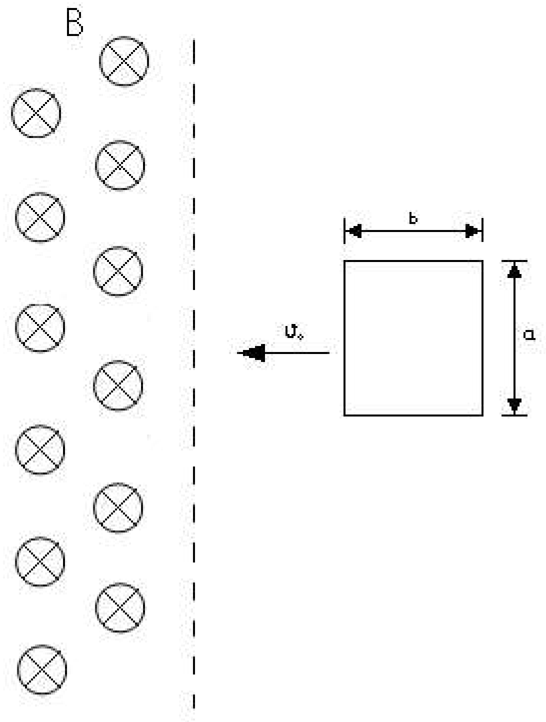
XXXII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP III
Zadanie teoretyczne

ZADANIE T3

Nazwa zadania: „Ramka”

Prostokątna ramka z cienkiego, jednorodnego drutu, o oporności R i masie m poruszając się z prędkością początkową v_0 wbiega w obszar stałego, jednorodnego pola magnetycznego o indukcji B prostopadłej do płaszczyzny ramki oraz do v_0. Prędkość v_0 jest prostopadła do jednego z boków ramki. Wymiary ramki wynoszą $a \times b$. Opisz ruch ramki.



Uwaga: Równania różniczkowe

$$\frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad \text{i} \quad \frac{dx}{dt} = ae^{-kt}$$

mają rozwiązania równe odpowiednio

$$x(t) = x_0 e^{-kt} \quad \text{i} \quad x(t) = x_0 + \frac{a}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

ROZWIĄZANIE ZADANIA T3

Przed dostaniem się do obszaru pola magnetycznego ruch ramki jest ruchem jednostajnym i prostoliniowym. Gdy jeden boków ramki wejdzie w obszar pola, to pojawia się siła elektromotoryczna indukcji równa

$$E(t) = aBv(t) \text{ ,}$$

gdzie $v(t)$ oznacza prędkość w chwili t. Pod wpływem tej siły elektromotorycznej w ramce płynie prąd o natężeniu danym wzorem

$$i = -\frac{aB}{R} v(t) .$$

Na boki ramki równoległe do v_0 działają siły elektrodynamiczne, które się wzajemnie znoszą. Na bok ramki, który jeszcze nie wszedł w obszar siły nie działa żadna siła. Jedyną więc siłą działającą na ramkę w początkowym okresie ruchu (tj. zanim cała znajdzie się w polu magnetycznym, co może, ale nie musi nastąpić) jest siła działająca na bok o długości a poruszający się w obszarze pola magnetycznego. Siła ta wynosi

$$F(t) = -\frac{a^2 B^2}{R} v(t) . \tag{1}$$

Analiza kierunku tej siły wskazuje, że jest to siła hamująca ruch ramki i że jej moment względem środka masy ramki jest równy zeru. Zatem ramka nie będzie się obracać, cały czas będzie ona poruszać się będzie ruchem postępowym.

Wzór (1) można zapisać następująco

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{a^2 B^2}{mR} \frac{dx}{dt}$$

lub

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{a^2 B^2}{mR} v . \tag{2}$$

Stąd po skorzystaniu ze wskazówki z treści zadania dostajemy:

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{a^2 B^2 t}{mR}} . \tag{3}$$

Ale

$$v = \frac{dx}{dt} .$$

Zatem

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\frac{a^2 B^2}{mR} t}$$

Stąd zaś

$$x(t) = \frac{v_0 mR}{a^2 B^2} \left(1 - e^{-\frac{a^2 B^2 t}{mR}} \right); \quad x_0 = 0 . \tag{4}$$

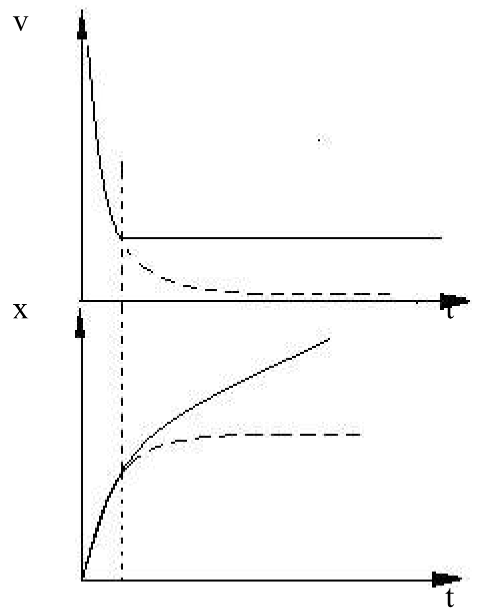
W dotychczasowych rozważaniach milcząco zakładaliśmy, że drugi bok ramki (o długości a) znajduje się cały czas poza obszarem pola magnetycznego. Zwróćmy uwagę, że gdyby bok ten wszedł w ple magnetyczne, to ramka poruszałaby się od tej chwili ruchem jednostajnym, gdyż przestałby w niej płynąć prąd. Zbadajmy, kiedy to może nastąpić.

Obliczamy $x(t)$ dla $t \to \infty$. Nietrudno zauważyć, że

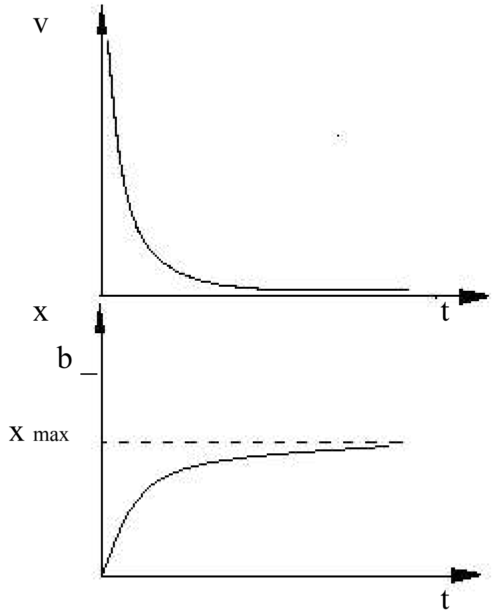
$$x_{\max} = \lim x(t) = \frac{v_0 mR}{a^2 B^2} .$$

Jeżeli wielkość ta jest mniejsza od b, to ramka cały czas będzie poruszać się z coraz mniejszą prędkością i drugi bok ramki nie wejdzie w pole magnetyczne. Jeżeli zaś $x_{\max}$ będzie większe od b, to przez pewien czas ramka będzie poruszała się ruchem opóźnionym (ale nie jednostajnie opóźnionym), a od chwili, gdy drugi bok ramki wejdzie w pole magnetyczne – ruchem jednostajnym. Przypadek gdy $x_{\max} = b$

nie różni się niczym istotnym od przypadku gdy $x_{\max}\langle b$. Zmiany x i v pokazano na rysunku.



$x_{\max}\rangle b$



$x_{\max}\langle b$

Zadanie powyższe było zadaniem łatwym, m. in. ze względu na uwagę zamieszczoną w treści zadania. Niestety, wiele osób poprzestało na rozwiązywaniu równana otrzymując wzory (3) i (4) na $x(t)$ i $v(t)$. Za rozwiązanie takie było można otrzymać zaledwie połowę punktów. W rozwiązaniu powyższego zadania bardzo ważna była dyskusja. Wieli osób w ogóle nie zauważyło dwóch możliwych przypadków, a ci, którzy je zauważyli często nie doprowadzili dyskusji do końca. Średnia ocena wynosiła około 5 punktów. Powyżej 5 punktów otrzymało niewielu ponad połowę zawodników.

Źródło:
Zadanie pochodzi z „„Kształcimy olimpijczyków”,
Autor: W.Gorzkowski, A.Kotlicki

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl