



# XXXVI OLIMPIADA FIZYCZNA

(1986/1987)

## ZAWODY III STOPNIA

### CZEŚĆ DOŚWIADCZALNA

#### Zadanie doświadczalne – D

**Nazwa** – Wyznaczanie zależności indukcji magnetycznej magnesu od odległości.

**Źródła** – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej

– Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki: *Fizyka w Szkole* nr 5, 1987

– T.M. Molenda, IF US, [www.OF.szc.pl](http://www.OF.szc.pl).

Mając do dyspozycji:

- silniczek z zasilaczem,
- magnes do zamocowania na osi silniczka,
- papier logarytmiczny,
- papier milimetry (do pomiaru odległości)
- statyw z uchwytami,
- oscyloskop,
- cewkę,
- przewody,

wyznacz zależność indukcji magnetycznej magnesu od odległości

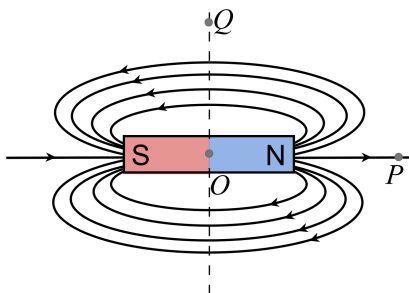
a) na osi magnesu,

b) na prostej prostopadłej do tej osi.

Porównaj otrzymaną zależność z przewidywaną teoretycznie dla dipola magnetycznego.

## Rozwiązanie zadania D – XXXVI OF, III stopień, część doświadczalna

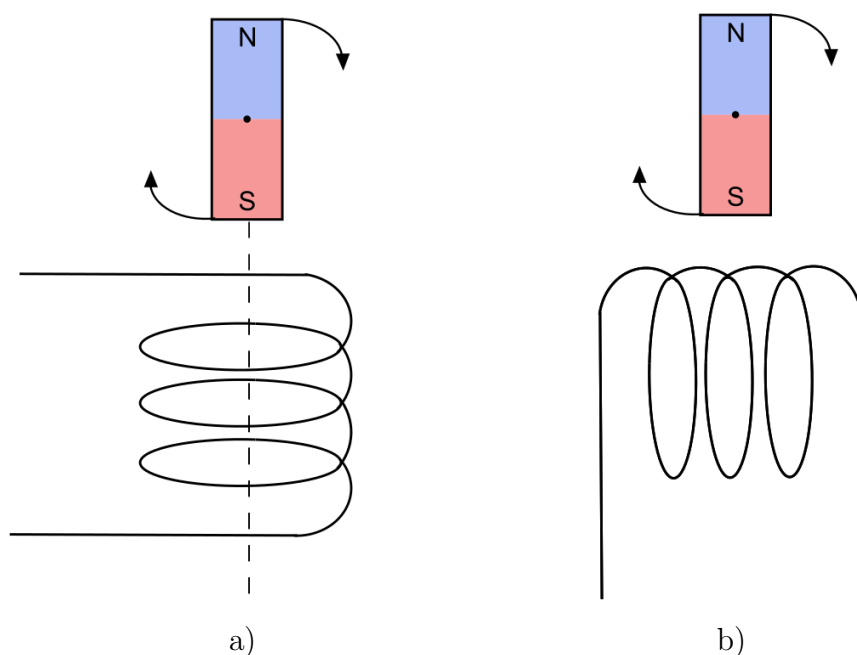
Rozważamy najpierw linie pola magnetycznego wytworzonego przez magnes (rys. 1).



Rys. 1

Na osi magnesu (punkt  $P$ ) kierunek pola magnetycznego jest zgodny z kierunkiem prostej łączącej środek magnesu (punkt  $O$ ) z punktem  $Q$ , a na osi prostopadłej do osi magnesu (np. punkt  $Q$ ) kierunek linii pola jest prostopadły do prostej  $OQ$ . Sugeruje to metodę rozwiązania zadania. Jeżeli wprowadzimy magnes w ruch obrotowy i w jego pobliżu umieścimy cewkę – jak na rys. 2a, to indukowana na niej siła elektromagnetyczna będzie związana z oscylacją składowej pola wzdłuż osi magnesu, a w przypadku umieszczenia cewki jak na rys. 2b indukowana siła elektromagnetyczna będzie związana z oscylacją składowej pola prostopadłej do osi magnesu.

Obliczmy teraz natężenie pola magnetycznego dipola na jego osi i na prostej prostopadłej do jego osi. Można zastosować tutaj dwie metody. Po pierwsze można posłużyć się pojęciem masy magnetycznej (analog ładunku elektrycznego) i przeprowadzić rozumowanie takie samo jak dla dipola elektrycznego. Doświadczenie uczy nas, że masy magnetyczne nie występują w przyrodzie, nie ma jednak żadnej teorii, która wykluczyłaby ich istnienie. Rzeczywiście, projektowanych jest dużo doświadczeń mających na celu ewentualne wykrycie pojedynczych „ładunków” magnetycznych, tzw. monopoli magnetycznych.



Rys. 2

Druga metoda, którą możemy się posłużyć, to przyjęcie, że dobrym modelem dipola magnetycznego jest pętla z prądem w kształcie okręgu (oś dipola jest prostopadła do płaszczyzny okręgu) i że wytworzone przez taką pętlę pole magnetyczne jest polem dipolowym. Przy obu tych metodach zakłada się, że wymiary dipola (w pierwszym przypadku odległość między masami magnetycznymi, a w drugim promień pętli) są małe w porównaniu z odległością dipola od punktu, w którym mierzymy indukcję magnetyczną.

W pierwszej metodzie mamy odległość  $r$  od osi dipola składającego się z dwu mas magnetycznych  $M$  oraz  $-M$  odległych o  $d$  (rys. 3).



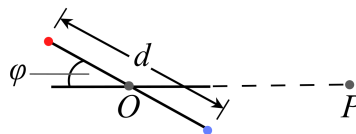
Rys. 3

Indukcja magnetyczna pochodząca od pojedynczej masy magnetycznej wynosi  $B = AM/r^2$ , gdzie  $A$  – pewna stała. Zatem wartość indukcji magnetycznej w punkcie  $P$  wynosi:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{B}_{||}| &= |\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2| = B_1 - B_2 = \frac{AM}{\left(r - \frac{d}{2}\right)^2} = \\
 &= \frac{AM(r^2 + rd + d^2 - r^2 + rd - d^2)}{\left(r^2 - \frac{d^2}{4}\right)^2} \approx \\
 &\approx \frac{2AMd}{r^3} \quad (\text{ponieważ } d \ll r).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Wielkość  $Md$  nazywamy momentem dipolowym. Oczywiście kierunek pola jest wzdłuż osi magnesu.

Jeżeli teraz obrócimy dipol o kąt  $\varphi$  od położenia z rys. 3, to widać, że składowa pola wzdłuż kierunku  $OP$  zmieni się tak, jakby dipol uległ skróceniu (rys. 4). Wielkość  $d$  przechodzi w  $d \cos \varphi$ .

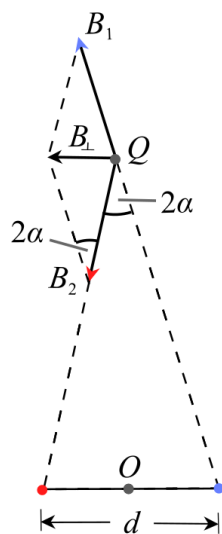


Rys. 4

Dla ruchu obrotowego dipola, gdzie  $\varphi = \omega t$  ( $\omega$  jest częstością kątową ruchu obrotowego) mamy

$$B_{||} = \frac{2AM}{r^3} d \cos \omega t. \tag{2}$$

Rozważamy teraz składową prostopadłą do osi magnesu (rys. 5):



Rys. 5

$$|\mathbf{B}_\perp| = |\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2| = \frac{AM}{r^2} \sin \alpha + \frac{AM}{r^2} \sin \alpha, \tag{3}$$

ale ponieważ

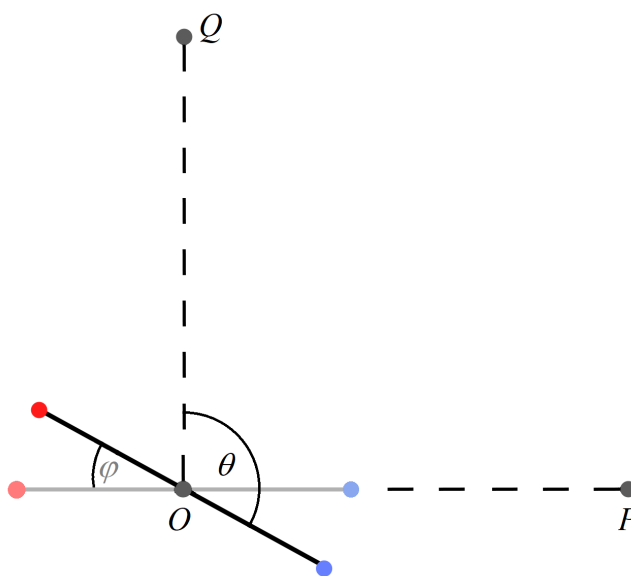
$$\sin \alpha = \frac{d}{2r},$$

więc

$$B_\perp \approx \frac{AMd}{r^3}. \tag{4}$$

Jeżeli obrócimy dipol o kąt  $\theta$  w porównaniu z położeniem na rys. 4, to składowa  $\mathbf{B}_\perp$  zmieni się znowu ze względu na pozorne skrócenie dipola do wartości  $d \cos \theta$  i będzie wynosić:

$$B_\perp = \frac{AM}{r^3} d \cos \theta. \tag{5}$$



Rys. 6

Ponieważ  $\theta = 90^\circ + \varphi = 90^\circ + \omega t$  dla obrotu dipola z prędkością kołową  $\omega$  mamy więc

$$B_{\perp} = \frac{AM}{r^3} d \sin \omega t. \quad (6)$$

Widać, że zarówno  $B_{\parallel}$ , jak i  $B_{\perp}$  oscylują przy obrocie dipola z częstotliwością  $\omega t$ , przy czym wartość maksymalna składowej  $B_{\parallel}$  jest dwa razy większa od wartości maksymalnej  $B_{\perp}$ .

Rozumowanie ze „skracaniem” dipola, aby otrzymać oscylacje  $B_{\parallel}$  i  $B_{\perp}$  w ruchu obrotowym, jest przybliżone. Ścisłe rozwiązanie, wymagające obliczenia  $B_{\parallel}$  i  $B_{\perp}$  dla dowolnego kąta ustawienia dipola względem prostej łączącej dipol z cewką, jest znacznie bardziej pracochłonne, ale prowadzi do takiego samego wyniku (oczywiście dla  $d \ll r$ ).

Obliczenie siły elektromotorycznej indukcji  $\mathcal{E}$  dla obu przypadków jest proste. Ponieważ

$$\mathcal{E} = -n \frac{d\Phi}{dt},$$

gdzie  $n$  – liczba zwojów w cewce, a  $\Phi$  – strumień pola magnetycznego przechodzącego przez cewkę, więc (z dokładnością do znaku)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\parallel} &= \omega n S \frac{2AM}{r^3} d \sin \omega t, \\ \mathcal{E}_{\perp} &= \omega n S \frac{AM}{r^3} d \sin \omega t, \end{aligned}$$

gdzie  $S$  – powierzchnia przekroju cewki. Założono tu, że długość cewki jest mała w porównaniu z  $r$  i wobec tego składowe  $B_{\parallel}$  i  $B_{\perp}$  są takie same dla każdego zwoju cewki.

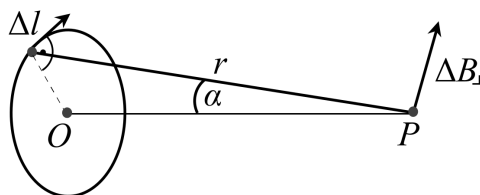
Identyczne wyniki można otrzymać, biorąc jako model dipola pętlę z prądem i obliczając pole na prostej prostopadłej do powierzchni pętli (wzdłuż osi dipola) i prostej leżącej w płaszczyźnie pętli i przechodzącej przez jej środek (wzdłuż prostej prostopadłej do osi dipola). Korzystamy w obu przypadkach z prawa Biot-Savarta (J. Blinowski, J. Trylski: *Fizyka dla kandydatów na wyższe uczelnie*, PWN, s. 265). Indukcja magnetyczna pochodząca od elementu przewodnika z prądem i o długości  $\Delta \mathbf{l}$  wynosi

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I \Delta \mathbf{l} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}.$$

Dla pętli z prądem możemy scałkować to wyrażenie po pętli. W przypadku pola wzdłuż osi dipola mamy (patrz rys. 7)

$$B_{\parallel} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\pi d} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Ponieważ  $\Delta \mathbf{l}$  jest prostopadłe do  $\mathbf{r}$  dla całego obwodu, więc  $|\Delta \mathbf{l} \times \mathbf{r}| = \Delta l \cdot r$ . Widać, że składowe prostopadłe do osi  $OP$  znoszą się ze względu na symetrię układu, a składowe równoległe będą miały wartość  $\Delta B \cdot \sin \alpha$ , gdzie  $\sin \alpha = d/2r$  ( $d$  – średnica pętli).



Rys. 7

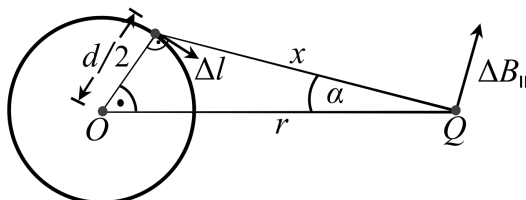
Mamy więc

$$B_{\parallel} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\pi d} \frac{rd}{2rr^3} dl = \frac{\mu_0 I d}{2 \cdot 4\pi r^3} \int_0^{\pi d} dl = \frac{\mu_0 I \pi d^2}{8\pi r^3}.$$

Poczyn powierzchni pętli ( $\pi d^2/4$ ) i natężenia prądu  $I$  jest momentem dipolowym  $p$  dipola, więc ostatecznie

$$B_{\parallel} = \frac{\mu_0 p}{2\pi r^3}. \quad (7)$$

Dla kierunku prostopadłego do osi dipola mamy sytuację przedstawioną na rys. 8.



Rys. 8<sup>1</sup>

Rozważmy element pętli z prądem  $\Delta l$  jak na rysunku. Pole pochodzące od tego elementu w punkcie  $Q$  wynosi

$$|\Delta \mathbf{B}_{\perp}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{|\mathbf{dl} \times \mathbf{x}|}{x^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\Delta l \sin(90^\circ - \alpha - \beta)}{x^2}$$

(łatwo pokazać, że kąt między  $\Delta l$  i  $\mathbf{x}$  wynosi  $180^\circ - \alpha - \beta - 90^\circ$ ).

Korzystając ze wzorów trygonometrycznych otrzymujemy

$$\Delta B_{\perp} = \frac{\mu_0 I \Delta l (\cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha)}{4\pi \left[ \left(\frac{d}{2}\right)^2 + r^2 - rd \cos \beta \right]},$$

ale

$$\cos \alpha = \frac{r - \frac{d}{2} \cos \beta}{x}$$

i

$$\sin \alpha = \frac{\frac{d}{2} \sin \beta}{x},$$

więc po przekształceniach otrzymujemy

$$\Delta B_{\perp} = \frac{\mu_0 I \Delta l \left( r \cos \beta - \frac{d}{2} \right)}{4\pi r^3 \left( 1 - \frac{d}{r} \cos \beta + \frac{d^2}{4r^2} \right)^{3/2}}.$$

Dla  $d/2 \ll r$  mamy

$$\Delta B_{\perp} = \frac{\mu_0 I \Delta l}{4\pi r^3} \left( r \cos \beta - \frac{d}{2} \right) \left( 1 + \frac{3d}{2r} \cos \beta \right) = \frac{\mu_0 I \Delta l}{4\pi r^3} \left( r \cos \beta - \frac{d}{2} + \frac{3}{2} d \cos^2 \beta - \frac{3d^2}{4r} \cos \beta \right).$$

<sup>1</sup>Dla oszczędności miejsca kierunek  $OQ$  został narysowany w poziomie – przyp. red.

Sumujemy po wszystkich elementach  $l$  (całkując przy  $l = \frac{d}{2}\Delta\beta$ ), czyli

$$B_{\perp} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I d/2}{4\pi r^3} \left( r \cos \beta - \frac{d}{2} + \frac{3}{2}d \cos^2 \beta - \frac{3d^2}{4r} \cos \beta \right) d\beta,$$

ale

$$\int_0^{2\pi} d\beta = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos \beta d\beta = 0 \quad \text{i} \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 \beta d\beta = \pi,$$

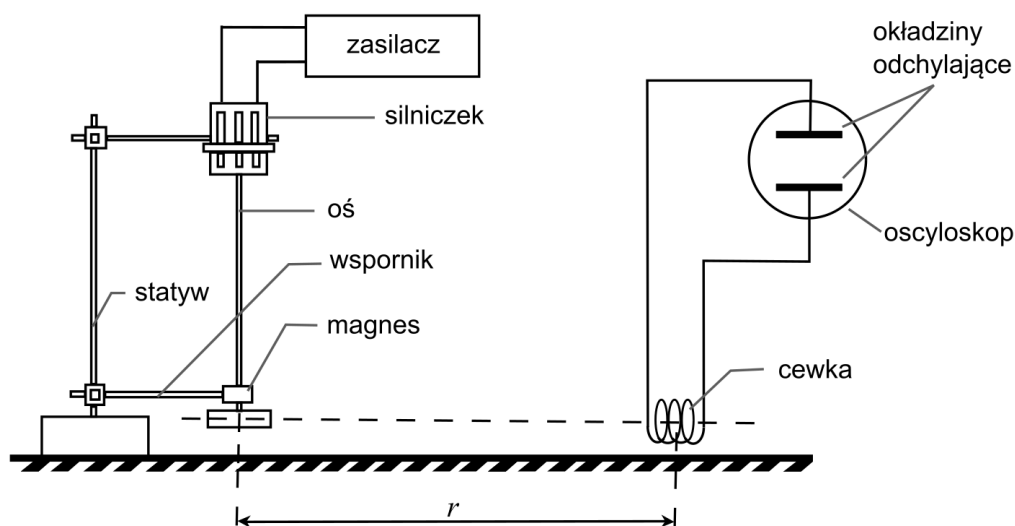
więc

$$B_{\perp} = \frac{\mu_0 I d/2}{4\pi r^3} \left( -\frac{d}{2} \cdot 2\pi + \frac{3}{2}d \cdot \pi \right) = \frac{\mu_0 I (d/2)^2 \pi}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 p}{4\pi r^3}. \quad (8)$$

Widać, że iloczynowi  $AMd$  we wzorach (1) i (4) odpowiada  $\mu_0 p/4\pi$  we wzorach (7) i (8).

Podobnie jak poprzednio, można pokazać, że przy obrocie magnesu mamy oscylacje składowych prostopadłej i równoległej indukcji, jak we wzorach (2) i (6). Oba wyprowadzenia teoretycznych zależności indukcji magnetycznej dipola od odległości były wykorzystywane przez zawodników i równie wysoko oceniane (zależnie od poprawności wyprowadzeń). Jeden z uczestników uzyskał kształt zależności indukcji od odległości z analizy wymiarowej, co było oczywiście także poprawne, ale nie dawało możliwości zorientowania się co do stosunku  $B_{\parallel}$  do  $B_{\perp}$ .

Doświadczenie wykonywane było w układzie przedstawionym na rys. 9. Cewka mogła być ustawiana tak, że jej oś pokrywała się z kierunkiem magnes – cewka lub też była od tego kierunku prostopadła (oś była w obu przypadkach pozioma). Długi pręt, przez który przekazywano napęd z silnika na magnes umożliwiało dostateczne oddalenie silnika od cewki, aby pole elektromagnetyczne wywołane pracą silnika nie było „odbierane” przez cewkę. Układ był zmontowany. Papier milimetrowy, który zawodnicy podkładali pod magnes i cewkę umożliwiało pomiar odległości  $r$  (od osi obrotu magnesu do środka cewki).



Rys. 9

Przebieg czasowy siły elektromotorycznej indukcji można było obserwować za pomocą oscyloskopu. Przebieg ten był w przybliżeniu sinusoidalny, a jego amplitudę można było zmierzyć na skali oscyloskopu, znając wzmocnienie wzmacniacza odchylenia pionowego. Podobnie skala podstawy czasu umożliwiała pomiar częstości przebiegu. Wszelkich wskazówek dotyczących posługiwania się oscyloskopem udzielili obecni na salach w czasie zawodów asystenci.

Oporność wejściowa oscyloskopu była dostatecznie duża ( $1\text{ M}\Omega$ ), aby spadek napięcia na zawadzie cewki można było pominąć, a więc obserwowana amplituda napięcia była jednocześnie amplitudą indukowanej siły elektromotorycznej.

Wyniki pomiarów, a więc zależności  $\mathcal{E}_{\parallel}$  i  $\mathcal{E}_{\perp}$  od  $r$  należało wykreślić na papierze logarytmicznym. Odpowiada to sporządzeniu wykresu  $\log \mathcal{E}$  od  $\log r$ : powinniśmy otrzymać dwie równoległe proste, dla których tangens kąta nachylenia wynosi  $-3$ . Ponieważ stosunek  $\mathcal{E}_{\parallel}/\mathcal{E}_{\perp}$  wynosi 2, proste powinny być przesunięte względem siebie o  $\log 2$  wzdłuż osi pionowej ( $\log \mathcal{E}$ ).

Na błąd wyniku składa się szereg czynników. Po pierwsze, nie wszystkie założenia przyjęte przy analizie teoretycznej problemu były dobrze spełnione. A więc zarówno wymiary cewki, jak i magnesu były duże w porównaniu z dostępną do pomiarów odległością  $r$  (dla zbyt dużej  $r$  amplituda sygnału była porównywalna z amplitudą zakłóceń).

Ważne było mierzenie odległości do środka cewki – pomiar do jej brzegu przy stosunkowo dużych wymiarach cewki powodował „nachylenie” zagięcia wykresu na skali logarytmicznej, tak, że odczytana wartość bezwzględna tangensa kąta nachylenia wydawała się mniejsza. Nieco mniejszy wpływ na błąd wyniku miał sam błąd pomiaru<sup>2</sup> odległości  $r$  ( $\pm 1\text{ mm}$ ) i błąd pomiaru  $\mathcal{E}_{\parallel}$  i  $\mathcal{E}_{\perp}$ . Wpływ tego ostatniego rósł oczywiście ze wzrostem  $r$ . Istotne było rozdzielenie amplitudy sygnału odpowiadającego  $\mathcal{E}_{\parallel}$  i  $\mathcal{E}_{\perp}$  od sygnału zakłóceń. Dlatego też pomiar amplitudy przy wyłączonej podstawie czasu nie był szczęśliwym rozwiązaniem.

## Punktacja

1. Znalezienie teoretycznej zależności indukcji magnetycznej od odległości od dipola wzdłuż jego osi ..... 2 pkt.  
(wyprowadzenie tej zależności dla dipola elektrycznego można znaleźć w podręczniku szkolnym)
2. Znalezienie tej zależności dla kierunku prostopadłego do osi dipola ..... 4 pkt.
3. Znalezienie wzoru na  $\mathcal{E}_{\parallel}$  i  $\mathcal{E}_{\perp}$  ..... 4 pkt.
4. Pomiary  $\mathcal{E}_{\parallel}$  i  $\mathcal{E}_{\perp}$  w zależności od  $r$  ..... 4 pkt.
5. Wykres logarytmiczny i obliczenie z danych doświadczalnych wykładnika przy  $r$  ..... 2 pkt.
6. Podanie przyczyn błędów i oszacowanie błędu ..... 2 pkt.
7. Porównanie otrzymanych wyników z teorią ..... 1 pkt.
8. Znalezienie stosunku  $\mathcal{E}_{\parallel}$  do  $\mathcal{E}_{\perp}$  ..... 1 pkt.

Pozycje 1–3 w Punktacji dotyczą części teoretycznej rozwiązania zadania.

<sup>2</sup>Błąd pomiaru – określenie było stosowane w znaczeniu obecnej niepewności pomiaru.

Problematykę tą od 1993 r. reguluje *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, u nas w nauczaniu od 2018 r. *Rekomendacja Polskiego Towarzystwa Fizycznego dotycząca nauczania o opracowywaniu wyników pomiarów w szkołach* – [www.2022.ptf.net.pl/programy/edukacja/rekomendacja](http://www.2022.ptf.net.pl/programy/edukacja/rekomendacja) (przyp. red.).

Można więc było uzyskać w sumie 20 punktów. Najlepszy z zawodników uzyskał 19 punktów. Było 5 ocen powyżej 15 punktów i 14 między 10 a 14 punktów. Najczęstsze błędy, jakie popełniali zawodnicy, to w części teoretycznej: twierdzenie, że  $B_{\perp}$  jest zawsze równe zero, lub że w miejscu cewki mamy do czynienia z wirującym polem magnetycznym o stałym natężeniu, postulowanie, że zależność indukcji magnetycznej dipola od odległości jest jak  $1/r^2$  (bardzo częste – niektórzy próbowali nawet „naginać” do tego wyniku dane doświadczalne). Część doświadczalna wypadła na ogół lepiej – duża część uczestników uzyskała prawidłowe wyniki. Zwraca uwagę brak umiejętności prawidłowego wykonywania wykresów i posługiwania się papierem logarytmicznym. Część uczniów wykonywała pomiar wzdłuż osi obrotu magnesu (pionowo). Jeżeli oś cewki ustawiona była zgodnie z osią obrotu, to oczywiście strumień magnetyczny przechodzący przez cewkę był stały i nie obserwuje się żadnej siły elektromotorycznej indukcji. Natomiast ustawiając cewkę prostopadle do osi obrotu można było uzyskać siłę elektromotoryczną związaną z  $B_{\perp}$  i zmierzyć prawidłowo zależność  $B_{\perp}$  od  $r$ .

Niektórzy nie zastanawiali się nad tym, jaka jest zależność  $B_{\parallel}$  i  $B_{\perp}$  od czasu przy obracaniu magnesu. Korzystali po prostu z informacji doświadczalnej, że  $\mathcal{E}_{\parallel}$  i  $\mathcal{E}_{\perp}$  są sinusoidalnie zależne od czasu i całkowali wzór  $\mathcal{E} = nS \cdot dB/dt$  analitycznie lub też wręcz przez obliczanie pola powierzchni na wykresie i uzyskiwali prawidłowe wyniki. Takie postępowanie było w pełni dopuszczalne i traktowane na równi z analizą wzorów.

Wydaje się, że zadanie to jest dość pouczające i łatwe do ustawienia; da się wykorzystać w pracy szkolnej, szczególnie na zajęciach pozalekcyjnych.