XXXIX OLIMPIADA FIZYCZNA
(1989/1990)
ZAWODY I STOPNIA

Zadanie teoretyczne – T2

Nazwa – Wartość stosunku okresu drgań wahadła matematycznego dla różnych amplitud.

Źródła – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej
- Jan Mostowski[1]: *Fizyka w Szkole* nr 4, 1990, s. 36–42
- Włodzimierz Ungier[2], Mirosław Hamera[3]: *Wybrane zadania z 43 Olimpiad Fizycznych*, MAGIPPA, Warszawa 1994, zad. 35, s. 14, 70
- T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Znajdź przybliżoną wartość stosunku okresu wahadła matematycznego o amplitudzie drgań $\varphi = \pi/2$ do okresu drgań tego samego wahadła wykonującego drganie o małej amplitudzie.

[1] Prof. dr hab. Jan Mostowski był sekretarzem naukowym ds. zadań w KGOF od XXXVIII OF do XXXIX OF, od L OF do LX OF pełnił funkcję Przewodniczącego KGOF a od LXIX OF – wiceprzewodniczący KGOF; był autorem artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF, współautorem książki *50 lat olimpiad fizycznych. Wybrane zadania z rozwiązaniami* (przyp. red.).

[2] Włodzimierz Ungier (wówczas dr) był sekretarzem naukowym ds. zadań teoretycznych w KGOF od XL OF do XLXIX OF, w tym okresie był współautorem artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF i ww. książki z zadaniami z OF (laureat XIV OF) (przyp. red.).

[3] Dr Mirosław Hamera pełnił funkcję zastępcy Kierownika Organizacyjnego Olimpiady Fizycznej w XXXVIII i XXXIX OF a w XL OF był kierownikiem, w tym okresie był autorem artykułów w *Fizyce w Szkole* o przebiegu i wynikach OF; współautor ww. książki z zadaniami z OF (przyp. red.).

Rozwiązanie zadania T2 – XXXIX OF, I stopień

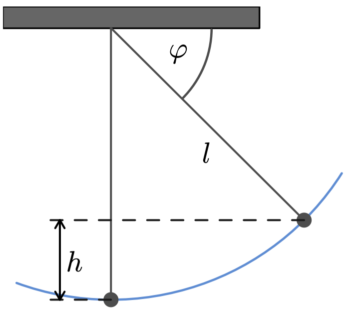
Istnieje bardzo wiele sposobów rozwiązania. Poniżej podajemy tylko jedno z możliwych rozwiązań.

Korzystając z zasady zachowania energii mamy (rys. 1)

$$mgh + mv^2/2 = mgl, \tag{1}$$

gdzie $h = l(1 - \sin\varphi)$, l – długość wahadła; v – chwilowa wartość prędkości liniowej, która związana jest z chwilową wartością prędkości kątowej ω wzorem $v = \omega l$, zatem

$$\omega^2 = (2g/l)\sin\varphi. \tag{2}$$



Rys. 1[4]

Ponieważ $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$, więc

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2g}{l}\sin\varphi}. \tag{3}$$

Związek ten mówi nam, jak zmienia się kąt wychylenia φ w zależności od czasu t. Związek ten można też zapisać następująco

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l}\sin\varphi}}. \tag{4}$$

Wzór (4) określa związek między upływem czasu $\mathrm{d}t$ a zmianą wychylenia wahadła z φ na $\varphi + \mathrm{d}\varphi$. Na podstawie (4) można wyznaczyć ćwierć okresu $T/4$, czyli czas odpowiadający zmianie wychylenia od 0 do $\pi/2$. Zatem

$$\frac{T}{4} = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l}\sin\varphi}}. \tag{5}$$

Jest to podstawowy nasz wynik. Można go jeszcze zapisać w postaci jawnie wykorzystującej wartość okresu $T_0 = \sqrt{l/g}$ tego wahadła wykonującego małe drgania, więc

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}}. \tag{6}$$

[4] Rys. został na nowo wykonany i uzupełniony przy opracowaniu zad. do bazy zadań w KGOF (przyp. red.).

Całka (6) nie wyraża się przez funkcje elementarne i najlepiej jest w tym celu wykorzystać metody graficzne. Zadanie sprowadza się teraz do przybliżonego obliczenia powyższej całki. Należy być tu ostrożnym, gdyż funkcja podcałkowa jest osobliwa w $\varphi = 0$. Podzielmy więc obszar całkowania na dwa zakresy: pierwszy od 0 do pewnej małej liczby, na przykład 0,02 i drugi od 0,02 do $\pi/2$. W pierwszym obszarze można z dobrym przybliżeniem przyjąć $\sin\varphi = \varphi$ i wyrazić całkę przez funkcję elementarną ($\int \sqrt{1/\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = 2\sqrt{\varphi} + C$). Mamy zatem

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(2\sqrt{0{,}02} + \int\limits_{0{,}02}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}}\right). \tag{7}$$

Ostatnią całkę można obliczyć graficznie wykonując wykres funkcji podcałkowej w podanych granicach na papierze milimetrowym i obliczając pole pod krzywą. W wyniku takich obliczeń otrzymujemy:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}(0{,}283 + 2{,}323) \cong 1{,}173. \tag{8}$$

Prawidłowym wynikiem, wziętym z tablic, z dokładnością do czterech znaków po przecinku jest:

$$T = 1{,}1803\,T_0. \tag{9}$$

Widzimy więc, że zastosowana przez nas metoda graficzna daje wynik zadowalający.

Punktacja[5]

1. Zastosowanie zasady zachowania energii, wzór (1) .... 2 pkt.
2. Zależność kąta wychylenia φ od czasu t lub upływu czasu
   a zmianą wychylenia wahadła, wzór (3) lub (4) .... 2 pkt.
3. Obliczenie ćwierć okresu wahań, wzór (5) .... 1 pkt.
4. Jawna postać dla stosunku okresów, wzór (6) .... 2 pkt.
5. Otrzymanie wzoru (7) i wartości liczbowej (8) .... 3 pkt.

[5] Punktacja pochodzi z Komitetu Okręgowego OF w Szczecinie (przyp. red.).