XXXIX OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP III
Zadanie teoretyczne

ZADANIE T1

Nazwa zadania: „Cząstka w polu elektrostatycznym"

Cząstka punktowa o masie m i ładunku elektrycznym q porusza się w polu elektrostatycznym o natężeniu E = E(x,y,z) po torze T. W punkcie P_o toru T cząstka ma prędkość v_o. Jaka prędkość powinna mieć w tym punkcie cząstka punktowa o masie M i ładunku Q, aby jej ruch pod wpływem tego samego pola E odbywał się po tym samym torze T?

Uwaga! Ograniczamy rozważania do cząstek o prędkościach małych w porównaniu z prędkością światła.

ROZWIĄZANIE ZADANIA T1

W dowolnym polu elektrostatycznym E(r) tory dwóch różnych cząstek mogą być identyczne, jeżeli ładunki tych cząstek są jednakowego znaku (w polu E(r), którego źródłem jest punktowy ładunek dodatni, cząstka o ładunku ujemnym może poruszać się po okręgu wokół źródła pola, natomiast ruch cząstki naładowanej dodatnio nie może odbywać się po okręgu wokół dodatnio naładowanego źródła pola).

Równania ruchu cząstek o masach m i m oraz ładunkach elektrycznych równych odpowiednio q i Q są następujące:

$$d^2 r / dt^2 = (q/m) E(r) \tag{1}$$

$$d^2 r' / dt^2 = (Q/M) E(r') \tag{2}$$

zauważamy, że równanie (2) można sprowadzić do postaci (1) przez wprowadzenie parametru τ zdefiniowanego równaniem $d\tau = \alpha dt$, gdzie $\alpha = \pm(mQ/Mq)^{1/2}$ (dla α = const, $\tau = \alpha t + \text{const}$):

$$d^2 r' / d\tau^2 = (q/m) E(r') \tag{2'}$$

W dalszym ciągu rozważań nie będzie konieczne rozwiązywanie równań (1),(2'). Wystarczające okażą się ogólne wiadomości dotyczące rozwiązań tych równań. Równania (1) i (2') są równaniami różniczkowymi drugiego rzędu, więc dwa warunki początkowe jak np. położenie i prędkość w pewnej chwili czasu jednoznacznie określają ruch i tory cząstek. Rozwiązania równań (1) i (2'), r(t) i r'(τ) są równaniami parametrycznymi krzywych w przestrzeni – ciągła zmiana czasu traktowanego jako parametr wyznacza tor T cząstki „m, q" zaś ciągła zmiana parametru τ wyznacza tor T' cząstki „M,Q". Żądanie identyczności torów T i T' wymaga, by – punkt P_o toru T był również punktem T', co oznacza, że dla pewnych $t = t_o$ i $\tau = \tau_o$, $r(t_o) = r'(\tau_o)$ -oraz by

$$dr/dt\big|_{t_0} = dr'/d\tau\big|_{\tau_0}, \tag{3}$$

co odpowiada identyczności kierunków obu stycznych do torów T i T' w punkcie P_o.
Ponieważ

$$dr/dt\big|_{t_0} = v_0 \quad \text{zaś} \quad dr'/d\tau\big|_{\tau_0} = dr'/\alpha dt = \alpha^{-1} v'_0\ ,$$

z równania (3) wynika następująca zależność między prędkościami cząstek w punkcie P_o

$$v_0 = \pm(mQ/Mq)^{1/2}\, v_0$$

Jeżeli więc różne cząstki o masach i ładunkach elektrycznych odpowiednio równych m, q i M, Q poruszają się po identycznych torach w dowolnie zadanym polu elektrostatycznym E = E(x,y,z), stosunek ich prędkości jest stały i w każdym punkcie toru wynosi $\alpha = \pm\,(mQ/Mq)^{1/2}$.

Istnienie dwóch rozwiązań odpowiadających $\alpha > 0$ i $\alpha < 0$ w przypadku ruchu cząstki naładowanej w polu elektrostatycznym oznacza, że cząstka może przebiegać przez wszystkie punkty tego samego toru również w odwróconej kolejności, co opowiada symetrii odwrócenia czasu.

Rozwiązanie B

Rozwiązanie to najczęściej występowało w pracach zawodników.

Niech w punkcie P_o promień krzywizny toru (identycznego w przypadku ruchu pierwszej i drugiej cząstki) ma wartość R_o, a E,,(P_o) niech oznacza składową wektora natężenia pola elektrostatycznego w kierunku chwilowego ośrodka krzywizny toru. Z porównania wartości sił odśrodkowej i dośrodkowej dla dwóch różnych cząstek otrzymujemy równania

$$qE'' = mv^2{}_0/R_0 \qquad (1)$$

oraz

$$QE'' = Mv'^2{}_0/R_0 \qquad (2)$$

Porównanie E,,/R_o wyznaczonych z powyższych dwóch równań sprowadza się do warunków $v'_o = \alpha v_o$, gdzie $\alpha = \pm\ (mQ/Mq)^{1/2}$. Ponieważ wektory prędkości są równoległe do stycznej do toru w punkcie P_o, zachodzi równość $v'_o = \alpha v_o$. Rycina 1 przedstawia histogram uzyskanych wyników

Źródło:
Zadanie pochodzi z czasopisma „Fizyka w Szkole"

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl