IV OLIMPIADA FIZYCZNA
(1954/1955)
ZAWODY II STOPNIA
CZĘŚĆ DOŚWIADCZALNA

Zadanie doświadczalne – D

Nazwa – Badanie zależności okresu drgań sprężynki od masy obciążnika i jej właściwości sprężystych.

Źródła – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej
– Kazimierz Rosiński: *IV Olimpiada Fizyczna. Zadania stopnia drugiego. Fizyka w Szkole* nr 4, 1955, s. 217–221
– Stefan Czarnecki: *Olimpiady Fizyczne I – IV*. PZWS, Warszawa 1956, s. 241–245
– T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Dane są następujące przyrządy:

– rama,
– trzy sprężynki,
– haczyki,
– odważniki,
– sekundomierz,
– i linijka.

Wiedząc, że ciężarek zawieszony na sprężynce może być wprawiany w ruch harmoniczny w kierunku pionowym, zbadaj doświadczalnie jak zależy okres ruchu ciężarka od jego masy oraz właściwości sprężystych sprężynki.

Uzyskaną zależność spróbuj przedstawić w postaci wzoru.

Rozwiązanie zadania D – IV OF, II stopień, część doświadczalna

Pierwszą czynnością przy rozwiązywaniu zadania będzie sprawdzenie, w jakich granicach użyte do doświadczenia sprężynki spełniają prawo Hooke'a. Według tego prawa odkształcenie (w tym przypadku wydłużenie x) jest proporcjonalne do siły F,

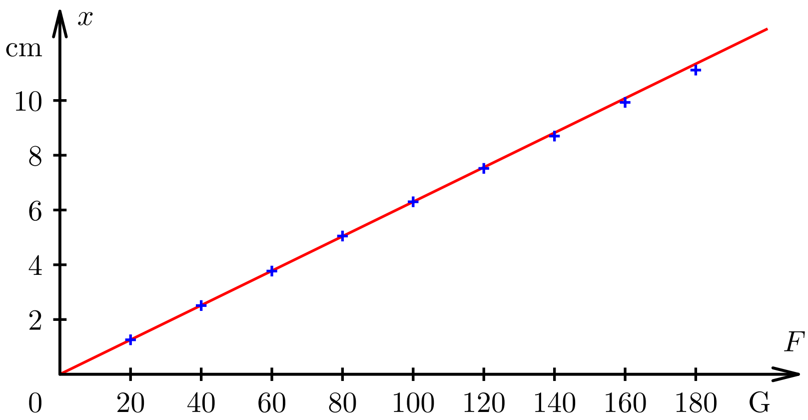
$$F = kx. \tag{1}$$

Jedną ze sprężynek obciążamy rozmaitymi odważnikami, notujemy odpowiadające im wydłużenia x i sporządzamy tabelkę (każdy zawodnik otrzymał sprężynki z maleńkimi szaleczkami zaopatrzonymi we wskazówki, co umożliwiało dokładne odczytywanie wychyleń)[1].

Tabela 1

F, G [2]	20	40	60	80	100	120	140	160	180
x, cm	1,26	2,51	3,77	5,05	6,30	7,52	8,70	9,93	11,11
k, G/cm^2	15,88	15,92	15,90	15,83	15,86	15,96	16,09	16,11	16,20

Pomiarów wydłużenia dokonywano za pomocą linijki o najdrobniejszych podziałkach 0,5 mm, a części tych podziałek oceniono „na oko". W trzecim wierszu tabelki podano obliczone wartości współczynnika sprężystości k. Widzimy, że wartości k są prawie stałe aż do wydłużenia o około 8 cm. Sporządzając wykres – rys. 1[3], stwierdzamy zależność liniową; odchylenia od linii prostej występują dopiero dla $x > 8$ cm, co odpowiada obciążeniom $F > 120$ G.



Rys. 1

[1]W treści zad. nie ma podanej szaleczki. Można wnosić, że bardziej chodzi o zawieszenie. Końce sprężyn na ogól są odpowiednio wygięte (w haczyki) i dostosowane do zawieszenia tak aby drgania były w pionie. Odważniki, można przypuszczać, miały przywiązane niteczki do zawieszenia – co w praktyce się robi.

Warto zwrócić uwagę, że na wyposażeniu Szkolnej Pracowni Fizycznej może być zestaw *Sprężyna do ruchu harmonicznego*, nr kat. V 6-74 produkowany dawniej w Fabryce Pomocy Naukowych w Nysie. Instrukcję do zestawu można odszukać na stronie www.dydaktyka.fizyka.szc.pl, w której znajdziemy zarówno wykaz przyrządów jak i szczegółowy opis doświadczenia (przyp. red.).

[2]G – symbol jednostki siły w tzw. układzie ciężarowym, w którym jedną z wielkości podstawowych była siła. Ozn. G (tzw. gram siły) jest dla podwielokrotności jednostki podstawowej kG (kilogram siły) def. jako siła przyciągania przez Ziemię masy 1 kg w miejscu, gdzie przyspieszenie ziemskie wynosi 9,8066 m/s^2.

W tabeli wartości F obciążników są wielokrotnościami 20 co sugeruje, że do dyspozycji były odważniki (ciężarki) o masach będących wielokrotnością masy ciężarka podstawowego 20 g – takie obciążniki z haczykami mogły też być na wyposażeniu Pracowni Fizycznej (przyp. red.).

[3]Podczas oprac. zad. do bazy KGOF wykres został wykonany na podstawie danych z Tabeli 1 (przyp. red.).

Obliczamy teraz średni współczynnik sprężystości dla zakresu dobrej stosowalności prawa Hooke'a

$$k = 15{,}89\ \mathrm{G/cm} \quad (= 15{,}89\ \mathrm{N/m}).$$

Postępując w ten sam sposób znajdujemy współczynnik sprężystości dla wszystkich sprężynek wyrażając je w dynach[4] na centymetr:

$$k_1 = \ \ 8\,528\ \mathrm{dyn/cm} \quad (= \ \ 8{,}53\ \mathrm{N/m}),$$
$$k_2 = 15\,890\ \mathrm{dyn/cm} \quad (= 15{,}89\ \mathrm{N/m})^5,$$
$$k_3 = 28\,320\ \mathrm{dyn/cm} \quad (= 28{,}32\ \mathrm{N/m}).$$

Teraz przystępujemy do zbadania zależności okresu drgań T od masy przy uwzględnieniu masy szalki podanej wraz z efektywną masą samej sprężynki[6]. Amplitudę drgań obieramy niewielką, by nie wykroczyć poza wydłużenie powyżej którego sprężyna przestaje się dostatecznie ściśle stosować do prawa Hooke'a. Pomiar okresu powtarzamy w celu zwiększenia dokładności kilka razy, mierzymy czas większej liczby okresów (pełnych drgań), np. 50. Czas zaczynamy liczyć od momentu przejścia ciężarka przez położenie równowagi, tj. wówczas gdy porusza się on z największą prędkością. Za wartość okresu przyjmujemu średnią z tych pomiarów.

W Tabeli 2 zebrano wyniki otrzymane dla drugiej ze sprężynek z szalką o masie 1,6 g, natomiast w Tabeli 2' – dane z *Fizyka w Szkole*, gdzie masy obciążające tworzą proste stosunki 1 : 2 : 3 : 4..., co wydaje się najprostrzą rachunkową metodą na znajdowanie zależności dla okresów drgań.

Tabela 2

m, g	14,6	24,6	34,6	44,6	54,6	64,6	74,6	84,6	94,6	104,6
$T_{śr}$, s	0,190	0,260	0,300	0,339	0,370	0,403	0,431	0,460	0,485	0,514
T^2, s^2	0,036	0,068	0,090	0,115	0,137	0,166	0,186	0,212	0,235	0,264

Tabela 2'. Dane dla sprężynki z *Fizyka w Szkole*

m, g	25	50	75	100	125	150
$T_{śr}$, s	0,282	0,396	0,482	0,566	0,628	0,694
T^2, s^2	0,080	0,157	0,232	0,320	0,294	0,482

[4] Dyna – dawna jednostka siły: 1 dyna = 1 g · cm / s^2 = 10^{-5} N (przyp. red.).

[5] Z obliczenia nachylenia prostej $x \sim F$, dla zakresu od 0 do 120 G otrzymujemy 15,92, a od 0 do 180 G wartość 16,16. Dla szerszego zakresu – drugi przypadek, śr. arytm. daje wartość 15,97 (przyp. red.).

[6] W przypadku wahadła sprężynowego w ruchu harmonicznym udział bierze nie tylko masa obciążnika (składająca się z masy ciężarków i mas/y haczyka/ów) lecz również masa sprężyny. Masa sprężyny rozłożona jest równomiernie wzdłóż całej długości sprężyny jednak zwoje drgają z amplitudami malejącymi od najniższego do najwyższego zwoju. Z rozważań teoretycznych wynika, że do całkowiej masy wpływającej na okres drgań (tzw. masa efektywna) należy dodać 1/3 masy sprężyny. Wartość tego współczynnika można wyznaczyć doświadczalnie w warunkach szkolnych – patrz np. Z. Gubański – *Ruch harmoniczny. Wyznaczanie okresu drgań obciążonej sprężyny. Fizyka w Szkole* nr 1, 1973, s. 42–43.

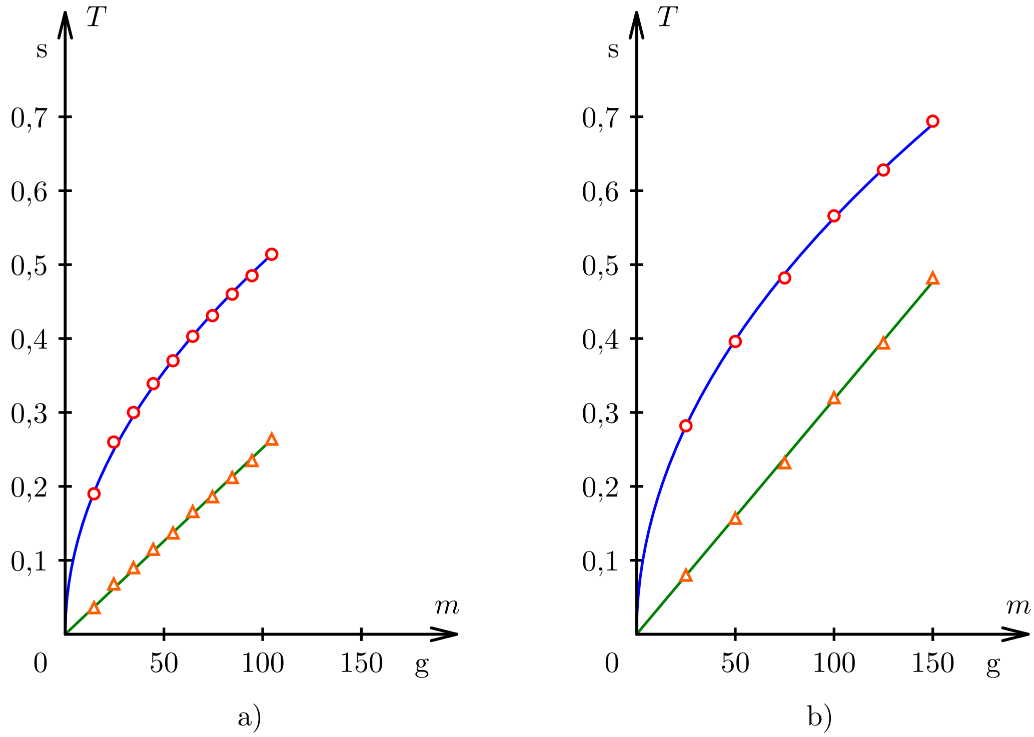
Korzystając z tabeli możemy wykreślić zależność $T = f(m)$ (rys. 2)[7]. Otrzymaliśmy linie krzywe przypominające parabole. Nasuwa się przypuszczenie, że zależność T od m jest funkcją kwadratową. Aby się o tym przekonać najlepiej jest sporządzić wykresy funkcji $T^2 = f(m)$. Istotnie są one liniami prostymi (rys. 2), a więc możemy napisać:

$$T^2 = Am,$$

czyli

$$T = B_1\sqrt{m}, \tag{2}$$

gdzie A i B_1 są stałymi współczynnikami. Stwierdziliśmy, że okres drgań danej sprężyny jest proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z masy drgającej.



Rys. 2. Zależność okresu T (linia niebieska) i kwadratu okresu T^2 (linia zielona) od masy obciążającej drgającą sprężynę dla danych z Tabeli 2 – (a) i Tabeli 2' – (b)

Obecnie przechodzimy do najtrudniejszej części zadania, a mianowicie stwierdzenia, w jaki sposób okres T zależy od rodzaju sprężyny (od jej właściwości sprężystych). Nasuwa się tu przypuszczenie, że decyduje o nich współczynnik k. Aby się o tym przekonać obciążamy wszystkie trzy sprężynki jednakowymi masami i mierzymy ich okresy. W Tabeli 3 i 3' przytoczono wyniki pomiarów. (Dane w Tabeli 3' pochodzą z *Fizyka w Szkole*.)

Tabela 3. Dane pomiarowe dla obciążenia masą m = 94,6 g

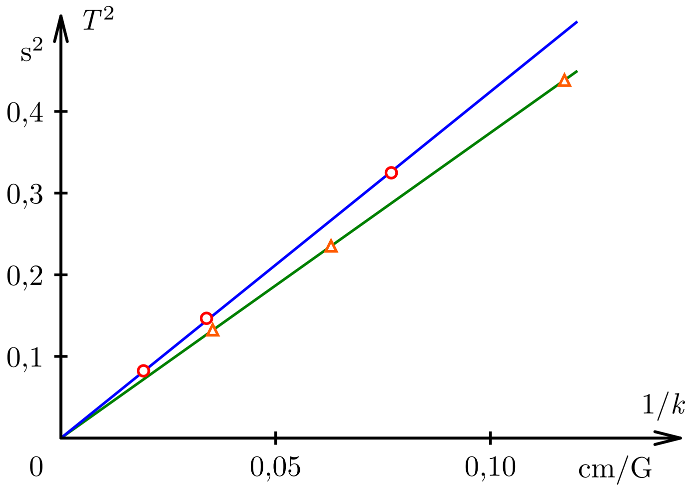
Sprężyna	I	II	III
k, G/cm	8,53	15,9	28,3
T, s	0,662	0,485	0,364

[7]Podczas oprac. zad. do bazy KGOF wykres został wygenerowany na podstawie danych z Tabeli 2 i Tabeli 2' (przyp. red.).

Tabela 3'. Dane pomiarowe dla obciążenia masą $m = 105$ g

Sprężyna	I'	II'	III'
k, G/cm	13,0	29,5	52,0
T, s	0,570	0,383	0,287

Powtarzając pomiary z innymi masami i sporządzając analogiczne tabelki można zauważyć przede wszystkim, że wzrost k wywołuje zmniejszanie się okresu T. Dalej, że nie jest to zwykła odwrotna proporcjonalność. Zmniejszanie się okresu jest o wiele powolniejsze od wzrostu współczynnika sprężystości. Z danych z Tabeli 3 widać, że kiedy k rośnie 4 razy, to okres maleje 2 razy, co wskazuje na zależność $T \sim 1/\sqrt{k}$ (T maleje odwrotnie proporcjonalnie do pierwiastka kwadratowego z k). Dla sprawdzenia tego przypuszczenia najlepiej nanieść te trzy punkty na wykres odkładając na osi rzędnych T^2 , a na osi odciętych $1/k$ (rys. 3)[8]. Istotnie w granicach błędów doświadczalnych[9] punkty leżą na prostej przechodzącej przez początek układu.



Rys. 3. Zależność kwadratu okresu T^2 od odwrotności k dla danych z Tabeli 3 (linia zielona) i Tabeli 3' (linia niebieska)

Mamy zatem:

$$T = B_2 \frac{1}{\sqrt{k}}, \tag{3}$$

gdzie B_2, podobnie jak poprzednio, jest wielkością stałą.

Połączone zależności (2) i (3) dadzą nam wzór rządzący ruchem drgającej sprężynki:

$$T = C\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{4}$$

[8]Podczas oprac. zad. do bazy KGOF wykres został wygenerowany z danych z Tabeli 3 i Tabeli 3', a linie pokolorowane (przyp. red.).

[9]Błąd pomiaru – określenie było stosowane w znaczeniu obecnej niepewności pomiaru.

Problematykę tą od 1993 r. reguluje *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, u nas w nauczaniu od 2018 r. *Rekomendacja Polskiego Towarzystwa Fizycznego dotycząca nauczania o opracowywaniu wyników pomiarów w szkołach* – https://www2022.ptf.net.pl/programy/edukacja/rekomendacja (przyp. red.).

Obliczenia stałej C można dokonać korzystając na przykład z tabelki dla każdego obciążenia osobno i wziąć średnią. Wartość ta wypada około 6,3. We wzorach na okresy drgań, jak pamiętamy z kursu szkolnego, jako stała przed pierwiastkiem występuje zazwyczaj 2π (np. wzór na wahadło, wzór Kelvina na okres drgań elektrycznych itp.). Łatwo się domyślić, że i tutaj stała $C = 2\pi$, zwłaszcza, że otrzymaliśmy, jak na tak proste środki doświadczalne bardzo dobrą zgodność liczbową. Ostateczny zatem wzór będzie:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{4'}$$

Wiemy, że ruch drgającej sprężynki, jak to z resztą wspomniano w tekście zadania, jest ruchem harmonicznym. Z teorii ruchu harmonicznego wiemy, że przyśpieszenie a_{h} ciężarka w każdej chwili jest proporcjonalne do jego wychylenia od położenia równowagi

$$a_{\mathrm{h}} = -\,\omega^2 x,$$

gdzie $\omega^2 = \dfrac{4\pi^2}{T^2}$ jest współczynnikiem roporcjonalności, a znak minus oznacza tylko to, że przyśpieszenie ma zawsze zwrot przeciwny niż wychylenie. Stąd siła w ruchu harmonicznym wywołująca w każdej chwili ruch ciężarka:

$$F_{\mathrm{h}} = -\,m\omega^2 x. \tag{5}$$

Widać z tego wzoru, że siła jest również proporcjonalna do wychylenia, a współczynnikiem proporcjonalności jest $m\omega^2$. Przypomnijmy sobie jednak, że i w prawie Hooke'a siła jest proporcjonalna do odkształcenia (tutaj wydłużenia). Z porównania wzorów (1) i (5) wynika natychmiast: $k = m\omega^2$ (znaku minus nie uwzględniliśmy, gdyż w tym przypadku nie interesuje to nas). Mamy dalej:

$$k = m\frac{4\pi^2}{T^2}$$

a stąd

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

zgodnie z (4').

Komentarz

W zadaniu chodziło o wyprowadzenie wzoru w posób czysto empiryczny. Nie było to, zwłaszcza jeżeli chodzi o uzasadnienie zależności (3), bynajmniej łatwe. Odbiło się to i na wynikach, które były bardzo słabe.