XLI OLIMPIADA FIZYCZNA (1991/1992). Stopień II, zad. teoretyczne – T3

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Włodzimierz Ungier, Krzysztof Karpierz: Fizyka w szkole Nr 3, 1993.

Nazwa zadania: Wymiana ciepła w procesie sprężania helu.

Działy: Termodynamika.

Słowa kluczowe: Przemiana adiabatyczna, sprężania, gaz doskonały, bilans cieplny, mol, ciepło, wymiana ciepła, I zasada termodynamiki, ciepło właściwe.

Zadanie teoretyczne - T3, zawody II stopnia, XLI OF.

W pewnej przemianie 1 mola helu zmiany temperatury towarzyszące powolnemu sprężaniu są dwukrotnie mniejsze od tych, które byłyby w przypadku sprężania adiabatycznego.

a) Odpowiedz i uzasadnij, czy podczas tej przemiany hel oddaje, czy pobiera ciepło z otoczenia.

b) Przyjmując, że hel jest gazem doskonałym i że jego temperatura początkowa wynosiła T_0, oblicz, jaką ilość ciepła wymienił hel z otoczeniem, jeżeli po sprężeniu osiągnął temperaturę $T_1 = \gamma T_0$ $(\gamma > 1)$.

Wskazówka! Dla $\alpha \neq -1$ zachodzi $\int x^{\alpha} dx = x^{\alpha+1}/(\alpha+1) + c$ oraz $\int x^{-1} dx = \ln x + C$, gdzie ln oznacza logarytm przy podstawie e = 2,718..., zaś C jest stałą całkowania.

Rozwiązanie

a) Gaz sprężony adiabatycznie nie wymienia ciepła z otoczeniem. Jeżeli więc podczas sprężania temperatura gazu wzrasta wolniej niż w procesie adiabatycznym, to gaz oddaje ciepło otoczeniu.

b) Ciepło Q pobrane przez gaz obliczamy korzystając z I zasady termodynamiki

$$Q = \Delta U + \int_{V_0}^{V_1} p dV, \tag{1}$$

gdzie $V_0 = V_0(T_0)$ jest objętością początkową, a $V_1(T_1)$ – objętością końcową gazu.

Dla gazu jednoatomowego i różnicy temperatur

$$\Delta T = T_1 - T_0 = (\gamma - 1) T_0,$$

mamy

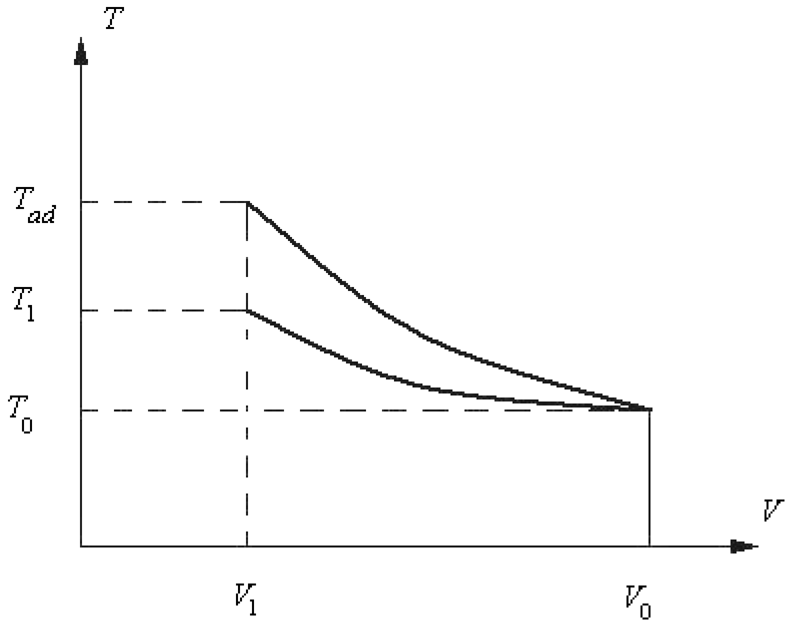
$$\Delta U = C_V \Delta T = \frac{3}{2}(\gamma - 1) R T_0, \tag{2}$$

gdzie R jest stałą gazową.

Obliczenie całki występującej we wzorze (1) wymaga określenia granicy V_0 i V_1 oraz funkcji podcałkowej $p = p(V)$ odpowiadającej rozważanemu procesowi.

Oznaczamy przez T_{ad} temperaturę jaką miałby gaz sprężony adiabatycznie od objętości V_0 do objętości V_1 (Rys. 1). Z warunków zadania wynika równanie

$$T_1 - T_0 = \frac{1}{2}(T_{ad} - T_0), \tag{3}$$



Rys. 1

z którego otrzymujemy

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(T_{ad} + T_0\right) , \tag{4}$$

Korzystając z równania adiabaty

$$TV^{\kappa - 1} = const , (\kappa = C_p / C_V) ,$$

gdzie C_p, C_V oznaczają odpowiednio ciepło właściwe gazu przy stałym ciśnieniu i przy stałej objętości mamy

$$T_0 V^{\kappa - 1} = T_{ad} V_1^{\kappa - 1} . \tag{5}$$

Z równań (4) i (5) otrzymujemy

$$T_1 = \frac{1}{2} T_0 \left[1 + \left(V_0 V_1 \right)^{\kappa - 1} \right] . \tag{6}$$

Po podstawieniu we wzorze (6) $T_1 = \gamma T_0$ otrzymujemy związek miedzy dolną i górną granicą całkowania

$$V_1 = V_0 \left(2\gamma - 1 \right)^{1/(1-\kappa)} . \tag{7}$$

Traktując we wzorze (6) V_1 i T_1, jako zmienne V i T oraz korzystając z równania

$$T = pVR ,$$

otrzymujemy

$$p = \frac{1}{2} RT_0 \left[V^{-1} + V_0^{\kappa - 1} V^{\kappa} \right] . \tag{8}$$

Wykonujemy następujące całkowanie

$$\int_{V_0}^{V_1} pdV = \frac{1}{2} RT_0 \left\{ \ln \left(V_1 / V_0 \right) + V_0^{1-\kappa} \left[V_1^{1-\kappa} / (1 - \kappa) - V_0^{1-\kappa} / (1 - \kappa) \right] \right\} =$$

$$= -\frac{3}{4} RT_0 \left[\ln \left(2\gamma - 1 \right) + 2\left(\gamma - 1 \right) \right] \tag{9}$$

gdzie podstawiliśmy

$$\kappa = \frac{5}{3}, \quad \left(C_V = \frac{3}{2}R, C_p = \frac{5}{2}R \right).$$

Podstawiając do wzoru (1) obliczone ΔU (2) oraz całkę (9) otrzymujemy ostatecznie

$$Q = -\frac{3}{4} RT_0 \ln\left(2\gamma - 1\right). \tag{10}$$

Proponowana punktacja

a) prawidłowa odpowiedź	max 2 pkt
b) wzór (1)	max 1 pkt
wzór (2)	max 1 pkt
wzór (6)	max 3 pkt
wzór (8)	max 1 pkt
wzór (9)	max 1 pkt
wzór (10)	max 1 pkt