# XLIII OLIMPIADA FIZYCZNA
## (1993/1994)
## ZAWODY I STOPNIA

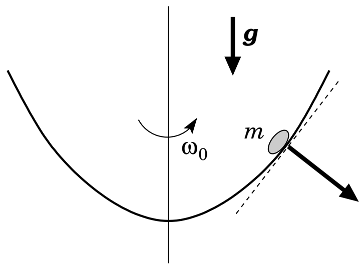
### Zadanie teoretyczne – T2

**Nazwa** – Wyznaczanie kształtu obracającej się czaszy z własności, że siła działająca na ciało w dowolnym punkcie czaszy jest do niej prostopadła.

**Źródła** – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej
– Włodzimierz Ungier[1], Krzysztof Karpierz[2], *Fizyka w Szkole* nr 3, 1994, s. 155–156
– Paweł Janiszewski[3], Jan Mostowski[4] (red.), *50 lat olimpiad fizycznych. Wybrane zadania z rozwiązaniami.* WN PWN, Warszawa 2002, zad. 13, s. 18, 105–106
– T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

---

W stałym polu ciężkości, po powierzchni czaszy obracającej się wokół pionowej osi, chodzi mały żuczek o masie $m$. Gdziekolwiek się zatrzymuje, wypadkowa sił działających na żuczka w układzie związanym z czaszą jest prostopadła do powierzchni, rys. 1. Moment bezwładności czaszy względem osi obrotu wynosi $I$. Początkowo żuczek znajdował się na dnie czaszy, zaś czasza obracała się z prędkością kątową $\omega_0$. Jaki kształt ma powierzchnia czaszy?




Rys. 1 ([5])

---

[1] Włodzimierz Ungier (wówczas dr) był sekretarzem naukowym ds. zadań teoretycznych w KGOF od XL OF do XLXIX OF, w tym okresie był współautorem artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF i ww. książki z zadaniami (laureat XIV OF) (przyp. red.).

[2] Dr Krzysztof Karpierz był sekretarzem naukowym ds. zadań doświadczalnych w KGOF w OF: XLI, XLII, L i LI, w tym okresie był współautorem/autorem części artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF (przyp. red.).

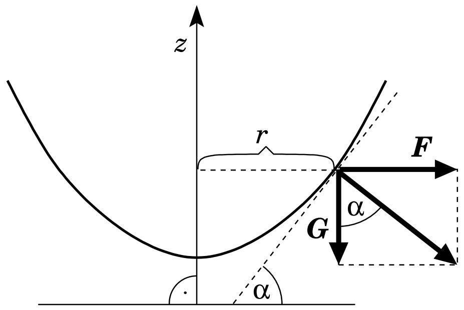
[3] Dr Paweł Janiszewski – Kierownik Organizacyjny Olimpiady Fizycznej od XLII OF do LVIII OF; w tym okresie był autorem artykułów w *Fizyce w Szkole* (do czasu ich publikowania w tym czasopiśmie, tj. do LV OF), dot. informacji o przebiegu i wynikach olimpiad fizycznych; współautorem ww. książki z zadaniami (przyp. red.).

[4] Prof. dr hab. Jan Mostowski był sekretarzem naukowym ds. zadań w KGOF od XXXVIII OF do XXXIX OF, od L OF do LX pełnił funkcję Przewodniczącego KGOF a od LXIX – wiceprzewodniczący KGOF; był autorem artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF, współautorem ww. książki z zadaniami (przyp. red.).

[5] Przy oprac. zadania do bazy zad. w KGOF skorzystano z wersji cyfrowej tego i następnych rys. z książki ww. w „Źródła” (przyp. red.).

## Rozwiązanie zadania T2 – XLIII OF, I stopień

Ze względu na symetrię osiową zagadnienia wystarczy podać równanie $z = z(r)$ przekroju czaszy płaszczyzną, w której leży oś obrotu, pokrywającą się z osią $z$, rys. 2.




Rys. 2

Ponieważ na układ nie działają siły zewnętrzne, całkowity moment pędu jest zachowany,

$$I\omega_0 = (I + mr^2)\omega(r), \tag{1}$$

gdzie $\omega(r)$ jest prędkością kątową obrotu czaszy z żuczkiem znajdującym się w odległości $r$ od osi obrotu. W układzie nieinercjalnym związanym z obracającą się czaszą na żuczka działają dwie siły, siła grawitacji $G = mg$ oraz pozorna siła odśrodkowa

$$F = F(r) = m\omega^2(r)r, \tag{2}$$

gdzie $\omega(r)$ wyznaczona z równania (1) wynosi $\omega(r) = I\omega_0/(I + mr^2)$. Wypadkowa sił $\mathbf{G}$ i $\mathbf{F}$ jest prostopadła do powierzchni czaszy, gdy $\operatorname{tg}\alpha = F/G$. Ale tangens nachylenia stycznej do krzywej w punkcie $r$ jest równy jej pochodnej w tym punkcie, więc

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = \frac{F(r)}{G} = \frac{m\omega^2(r)r}{mg} = \frac{Ar}{(I + mr^2)^2} \tag{3}$$

$(A = I^2\omega_0^2/g)$, skąd otrzymujemy

$$z(r) = A\int (I + mr^2)^{-2} r\,\mathrm{d}r \tag{4}$$
$$= \int \frac{A}{2m}t^{-2}\mathrm{d}t = -\frac{A}{2m}t^{-1} + C = -\frac{A}{2m}\left(I + mr^2\right)^{-1} + C.$$

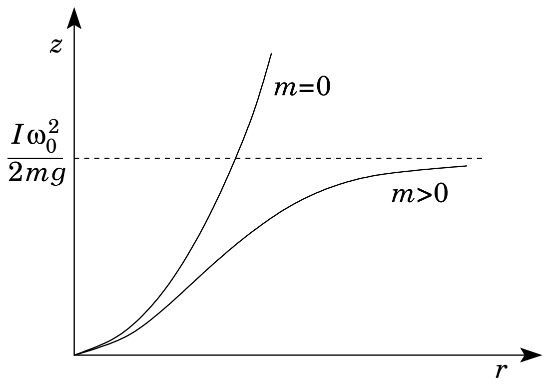
Wykonując całkowanie podstawiliśmy $t = I + mr^2$ ($\mathrm{d}t = 2mr\,\mathrm{d}r$). $C$ jest stałą całkowania. Kształt powierzchni czaszy w przestrzeni trójwymiarowej opisuje więc funkcja $z = z(x, y)$ postaci

$$z = -\frac{I^2\omega_0^2}{2mg}\left(\frac{1}{I + (m/I)(x^2 + y^2)} - 1\right) + C. \tag{5}$$

Przedyskutujemy wzór (5). Dla masy żuczka dążącej do zera kształt powierzchni czaszy powinien być taki sam jak kształt cieczy w obracającym się swobodnie wiadrze, czyli powinien być opisywany paraboloidą obrotową. Połóżmy stałą $C$ we wzorze (5) równą $C = I\omega_0^2/2mg$. Wtedy $z(0, 0) = 0$ i $z$ wyraża się wzorem

$$z = \frac{I\omega_0^2}{2mg}\left(\frac{1}{1 + (m/I)(x^2 + y^2)} - 1\right) = \frac{\omega_0^2}{2g}\frac{x^2 + y^2}{1 + (m/I)(x^2 + y^2)}. \tag{6}$$

Dla stosunku $m/I$ dążącego do zera otrzymujemy żądany kształt paraboloidy, rys. 3.




Rys. 3

**Punktacja**

1. Wzór (1) ........................................ 3 pkt.
2. Wzór (3) ........................................ 3 pkt.
3. Wzór (5) ........................................ 3 pkt.
4. Dyskusja wyniku (5) (wzór (6)) ........................................ 1 pkt.