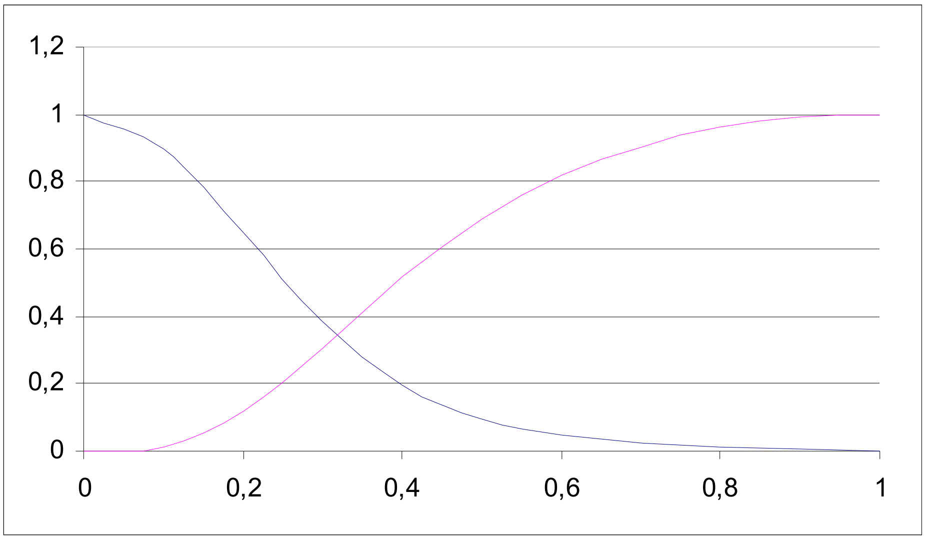
XLIV OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP II
Zadania teoretyczne

ZADANIE T1

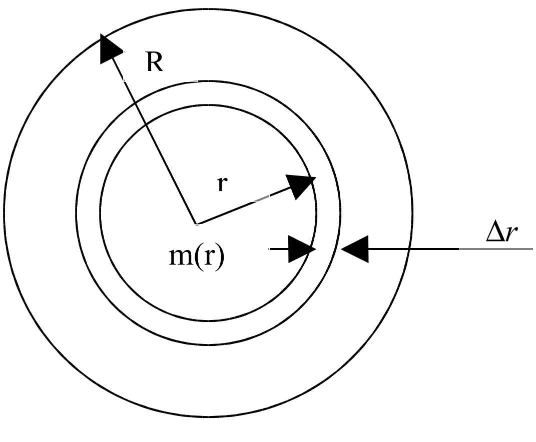
Gwiazdę podobną do naszego Słońca można uważać za kulę gorącego gazu. Temperatura i gęstość tego gazu przyjmują największe wartości w centrum gwiazdy. Zakładamy, że jedynym czynnikiem powstrzymującym gwiazdę przed zapadnięciem się pod wpływem sił grawitacji jest ciśnienie gazu (równowaga „hydrostatyczna”). Rozważmy gwiazdę, której masa i promień wynoszą odpowiednio $M = 1{,}2 * 10^{30}$ kg i $R = 4{,}5 * 10^{8}$ m. Oznaczamy przez $\rho(r)$ gęstość gazu w odległości r od środka gwiazdy, a przez $\rho_0 = \rho(0)$ – gęstość gazu w centrum. Niech m(r) oznacza masę zawartą wewnątrz sfery o promieniu r.
Zgodnie z dobrym teoretycznym modelem otrzymuje się następujące dane (tabela I i ryc. 1)

r/R	$\rho(r)/\rho_0$	m(r)/M
0	1,000	0
0,1	0,897	0,014
0,2	0,649	0,116
0,3	0,385	0,305
0,4	0,199	0,515
0,5	0,096	0,691
0,6	0,046	0,817
0,7	0,024	0,904
0,8	0,011	0,961
0,9	0,003	0,991
1,0	0	1,000



1. Wykorzystując powyższe dane liczbowe wyznacz gęstość ρ_0 w środku gwiazdy w kg/m^3 (zastosuj rozsądne przybliżenia bez zgadywania wzoru matematycznego $\rho = \rho(r)$).

2a. Podaj przyrost ciśnienia gazu p [p = p(r)] pomiędzy r i r + Δr (ryc. 2) w zależności od m(r), ρ (r) i stałej grawitacji G.



Ryc. 2

2b. Korzystając z wyniku otrzymanego w punkcie 2a oraz danych liczbowych wyznacz ciśnienie p_0 w N/m^2 (Pa) w centrum gwiazdy [zastosuj przybliżenia podobnie jak w punkcie 1].

3. Załóż, że mamy do czynienia z młodą gwiazdą składającą się całkowicie z wodoru, który jest w pobliżu centrum całkowicie zjonizowany. Zjonizowany wodór można traktować jako mieszaninę dwóch gazów doskonałych. Masa jednego mola protonów wynosi 1 g, a masa jednego mola elektronów wynosi w przybliżeniu 0 g. Wyznacz temperaturę T_0 w centrum gwiazdy. Stała grawitacji G = 6,67 * 10^{-11} Nm^2/kg^2, stała gazowa R_{gaz} = 8,31 J/molK.
Uwaga! W rozważaniach możesz skorzystać z papieru milimetrowego.

ROZWIĄZANIE ZADANIA T1

1. Całkowitą masę gwiazdy można wyrazić poprzez całkę

$$M = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr. \tag{1}$$

Całka ta jest w przybliżeniu równa sumie

$$M = \sum \rho(r) 4\pi r^2 \mathrm{B} \Delta r = 4\pi R^3 \rho_0 S_1 \tag{2}$$

gdzie

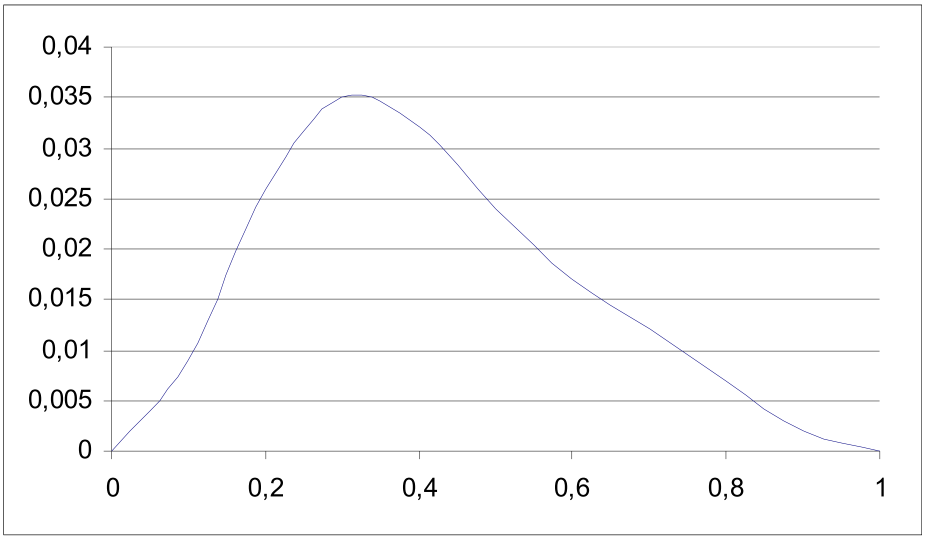
$$S_1 = \sum (r/R)^2 (\rho/\rho_0) \Delta(r/R) \tag{3}$$

Przyrost względnej odległości od centrum przyjmujemy zgodnie z danymi w tabeli I Δ (r/R) = 0,1. W celu obliczenia S_1 tworzymy tabelę **II**, w której umieszczamy wartości względnych odległości r/R, ich kwadratów $(r/R)^2$, a następnie ρ/ρ_0 i $(r/R)^2(\rho/\rho_0)$.
Zadowolimy się oszacowaniem wartości S_1 korzystając z metody graficznej. Sporządzamy zatem wykres zależności $(r/R)^2(\rho/\rho_0)$ (linia ciągła)od r/R, ryc.3.

r/R	$(r/R)^2$	$\rho(r)/\rho_0$	$(r/R)^2(\rho/\rho_0)$
0	0	1,000	0
0,1	0,01	0,897	0,009
0,2	0,04	0,649	0,026
0,3	0,09	0,385	0,035
0,4	0,16	0,199	0,032
0,5	0,25	0,096	0,024
0,6	0,36	0,046	0,017
0,7	0,49	0,024	0,012
0,8	0,64	0,011	0,007
0,9	0,81	0,003	0,002
1,0	1,00	0	0

Wartość S_1 jest w przybliżeniu równa polu trójkąta (linia przerywana) o podstawie 0,94 i wysokości 0,035 (ryc. 3). Otrzymujemy $S_1 \cong 0,165$, co po podstawieniu do równania (2) daje

$$\rho_0 \cong \frac{M}{4\pi R^3 S_1} = \frac{1,2 * 10^{30}}{4\pi (4,5 * 10^8)^3 0,017} = 6,2 * 10^4 \text{ kg/m}^3. \tag{4}$$

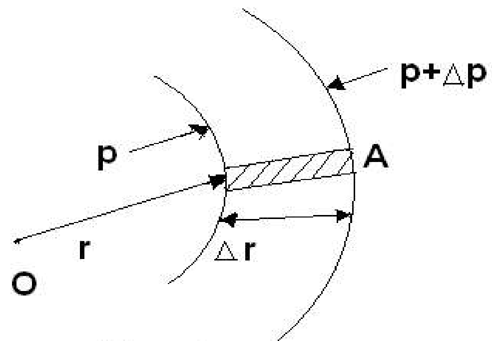


2a. Rozważmy stan równowagi materii zawartej w małym cylindrze o podstawie A znajdującym się wewnątrz gwiazdy pomiędzy r i r + Δr, ryc. 4. W warunkach równowagi zachodzi równość

$$pA - (p + \Delta p)\, A = G\, \frac{m(r)\rho(r) * A\Delta r}{r^2}, \qquad (5)$$

skąd otrzymujemy przyrost ciśnienia

$$\Delta p = -\, G\, \frac{m(r)\rho(r)\Delta r}{r^2}, \qquad (6)$$



Ryc. 4

2b. Możemy przyjąć, że ciśnienie gazy przy powierzchni kuli jest równe zero, p (r) = 0. Spełnione jest zatem równanie

$$p_0 + \sum \Delta p = 0, \qquad (7)$$

w którym sumowanie po przyrostach ciśnienia Δp przeprowadzamy od centrum gwiazdy do jej powierzchni. Korzystając z postaci (6) przyrostu Δp otrzymujemy

$$p_0 = \frac{GM\rho_0}{R} * \sum \frac{[m(r)/M][\rho(r)/\rho_0]}{(r/R)^2} * \Delta(r/R) = \frac{GM\rho_0}{R} S_2 \quad (8)$$

Podobnie jak w punkcie 1. konstruujemy tabelę III oraz wykres zależności $(m/M) * (\rho / \rho_0)/(r/R)^2$ od r/R. (ryc. 5).
Wartość sumy S_2

$$S_2 = \sum \frac{(m/M)(\rho/\rho_0)}{(r/R)^2} \Delta(r/R) \quad (9)$$

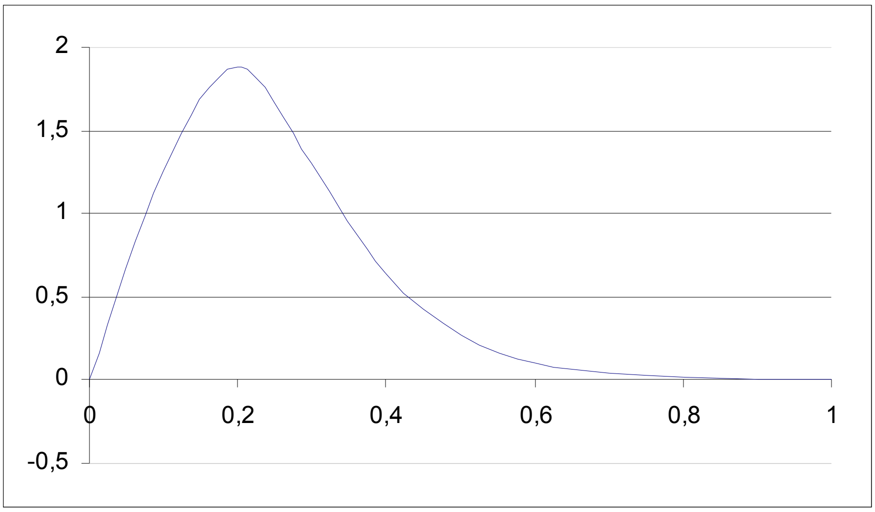


Tabela III

r/R	$(r/R)^2$	$\rho(r)/\rho_0$	m(r)/M	$(m/M)(\rho/\rho_0)/(r/R)^2$
0	0	1,000	0	0
0,1	0,01	0,897	0,014	1,26
0,2	0,04	0,649	0,116	1,88
0,3	0,09	0,385	0,305	1,30
0,4	0,16	0,199	0,515	0,64
0,5	0,25	0,096	0,691	0,27
0,6	0,36	0,046	0,817	0,10
0,7	0,49	0,024	0,904	0,04
0,8	0,64	0,011	0,961	0,02
0,9	0,81	0,003	0,991	0,00
1,0	1,00	0	1,000	0,00

Jest równa w przybliżeniu polu trójkąta o podstawie 0,55 i wysokości 2,0 (ryc. 5), czyli jest równa $S_2 \cong 0,55$. Zatem ciśnienie gazu w centrum gwiazdy przyjmuje wartość

$$\rho_0 = \frac{GM\rho_0}{R} S_2 \cong \frac{(6,67*10^{-11})*(1,2*10^{30})*(6,2*10^4)}{4,5*10^8}*0,55 \cong 6,0*10^{15} \text{ N/m}^2 \quad (10)$$

3. Dla mieszaniny n_1 moli gazu „1” i n_2 moli gazu „2”, zajmującej objętość V, równanie stanu ma postać

$$pV = (n_1 + n_2) R_{gaz} T, \quad (11)$$

gdzie p oznacza ciśnienie mieszaniny, a T – jej temperaturę. Gęstość mieszaniny wyraża się wzorem

$$\rho = \frac{n_1 m_1 + n_2 m_2}{V}, \quad (12)$$

gdzie m_i(i = 1,2) oznacza masę jednego mola i – tego gazu. Podzielimy obie strony równania (11) przez $n_1m_1 + n_2m_2$. Dostajemy wtedy równanie

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R_{gaz} * T}{m_{śr}}, \quad (13)$$

gdzie $m_{śr}$ jest średnią masę jednego mola mieszaniny,

$$m_{śr} = \frac{n_1 m_1 + n_2 m_2}{n_1 + n_2}, \quad (14)$$

W przypadku jednakowej liczby protonów i elektronów, $n_1 = n_2 = n$, co odpowiada neutralnemu ładunkowi gazu protonowo – elektronowego, otrzymujemy

$$m_{śr} = \frac{n*1g}{2n} = 0,5 \text{ g}. \quad (15)$$

Podstawiając do równania (13) otrzymane w punktach 1 i 2 wartości gęstości ρ_0 I ciśnienia p_0 dostajemy ostatecznie wartość temperatury w centrum gwiazdy,

$$T_0 = \frac{p_0 * m_{Sr}}{\rho_0 * R_{gaz}} = \frac{(6,0*10^{15})*(5*10^{-4})}{(6,2*10^4)*8,3} = 5,8*10^6 K. \quad (16)$$

Źródło:
Zadanie pochodzi z czasopisma „Fizyka w Szkole”