



# XLIV OLIMPIADA FIZYCZNA

(1994/1995)

ZAWODY III STOPNIA

CZĘŚĆ DOŚWIADCZALNA

## Zadanie doświadczalne – D

**Nazwa** – Badanie zależności momentu oporu aerodynamicznego powietrza od prędkości obrotowej śmigielka

**Źródło** – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;  
– Andrzej Wysmołek, sekretarz naukowy ds. zad. dośw. w KGOF, IFD UW  
– Włodzimierz Ungier, Andrzej Wysmołek: *Fizyka w szkole* nr 1, 1996  
– Paweł Janiszewski, Jan Mostowski (red.): *50 lat olimpiad fizycznych. Wybrane zadania z rozwiązaniami*, WN PWN, Warszawa 2002  
– T.M. Molenda, IF US, [www.OF.szc.pl](http://www.OF.szc.pl)

---

Masz do dyspozycji:

- silniczek prądu stałego,
- śmigielko, które można wsunąć na oś silnika,
- zasilacz prądu stałego o regulowanym napięciu,
- woltomierz,
- amperomierz,
- statyw z uchwytem do zamocowania silniczka,
- papier milimetrowy i logarytmiczny.

Zbadaj zależność momentu oporu aerodynamicznego powietrza  $M_{op}$  od prędkości obrotowej śmigielka  $\omega$ . Zakładając, że zależność ta ma postać

$$M_{op} = A\omega^\alpha,$$

wyznaczyć wartość wykładnika  $\alpha$ .

### Uwagi:

1. Prąd przekraczający 300 mA może zniszczyć silnik.
2. Przed włączeniem prądu, poproś asystenta o sprawdzenie układu.

## Rozwiązanie zadania D – XLIV OF, III stopień

## Część teoretyczna

Rozwiązanie zadania opiera się wykorzystaniu związków wielkości mechanicznych, takich jak prędkość obrotowa, czy moment siły oporu z wielkościami elektrycznymi – natężeniem prądu czy napięciem, które można mierzyć dostępnymi w zestawie doświadczalnym przyrządami pomiarowymi. Należy zauważyć, że w stanie ustalonym (tzn. gdy silnik się rozpędzi) wartość momentu siły oporu  $M_r$  jest równa momentowi sił  $M_s$ , który powstaje w silniku w wyniku przepływu prądu przez uzwojenie wirnika znajdującego się w polu magnesu stałego. Ponieważ siła elektrodynamiczna (siła Lorentza) działająca na uzwojenie z prądem jest proporcjonalna do natężenia przepływającego przez nie prądu  $I$ , to moment sił  $M_s$  wytwarzany przez silnik można wyrazić wzorem

$$M_r = M_s = CI,$$

gdzie  $C$  jest pewną stałą.

Zakładając, że moment siły oporu ruchu  $M_r$  można zapisać w postaci

$$M_r = M_{op} + M_0, \quad (1)$$

gdzie  $M_{op}$  jest momentem siły oporu aerodynamicznego śmigła,  $M_0$  – moment oporów ruchu dla silnika bez śmigła (np. tarcie łożysk, opór aerodynamiczny ruchu wirnika), otrzymujemy związek

$$M_{op}(\omega) = M_r(\omega) - M_0(\omega) = M_s(\omega) - M_0(\omega) = C(I(\omega) - I_0(\omega)). \quad (2)$$

Natężenie prądu  $I_0(\omega)$  odpowiada sytuacji, w której z osi silnika zdjęto śmigiełko.

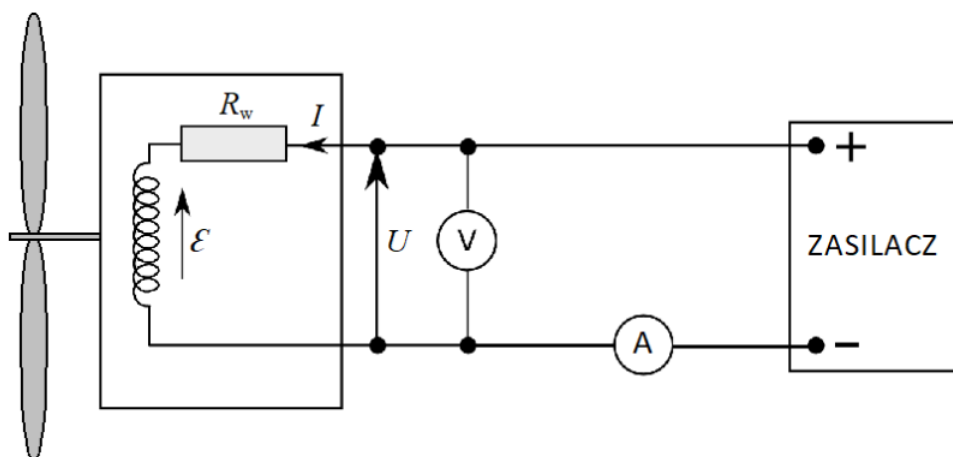
W poruszającym się uzwojeniu silnika, zgodnie z prawem Faraday'a, indukuje się napięcie  $\mathcal{E}$ . Jego wartość jest proporcjonalna do prędkości kątowej wirnika  $\omega$ :

$$\mathcal{E} = D\omega. \quad (3)$$

Wartość  $\mathcal{E}$  można wyznaczyć mierząc napięcie  $U$  na zaciskach silnika oraz prądu  $I$  płynącego przez jego uzwojenia. Jeśli silnik połączyć ze źródłem prądu w sposób przedstawiony na rys. 1, to napięcie  $U$  na zaciskach silnika wyniesie

$$U = IR_w + \mathcal{E}, \quad (4)$$

gdzie  $R_w$  jest oporem rzeczywistym uzwojenia silnika.



Rys. 1. Schemat układu doświadczalnego

Łącząc wzory (3) i (4) otrzymujemy:

$$\omega = \frac{U - IR_w}{D}$$

lub po zlogarytmowaniu<sup>1</sup>

$$\log\{\omega\} = \log\{U - IR_w\} - \log\{D\}. \quad (5)$$

Logarytmując wzór na  $M_{op}$  podany w treści zadania otrzymujemy

$$\log\{M_{op}(\omega)\} = \alpha \log\{\omega\} + \log\{A\}. \quad (6)$$

Podstawiając (5) do wzoru (6) otrzymujemy:

$$\log\{M_{op}(\omega)\} = \alpha \log\{U - IR_w\} + \log\left\{\frac{A}{D^\alpha}\right\}. \quad (7)$$

Wykorzystując wyrażenie (2) opisujące  $M_{op}$  do wzoru (7) otrzymujemy ostatecznie związek:

$$\log\{I - I_0\} = \alpha \log\{U - IR_w\} + \log\left\{\frac{A}{CD^\alpha}\right\}$$

lub

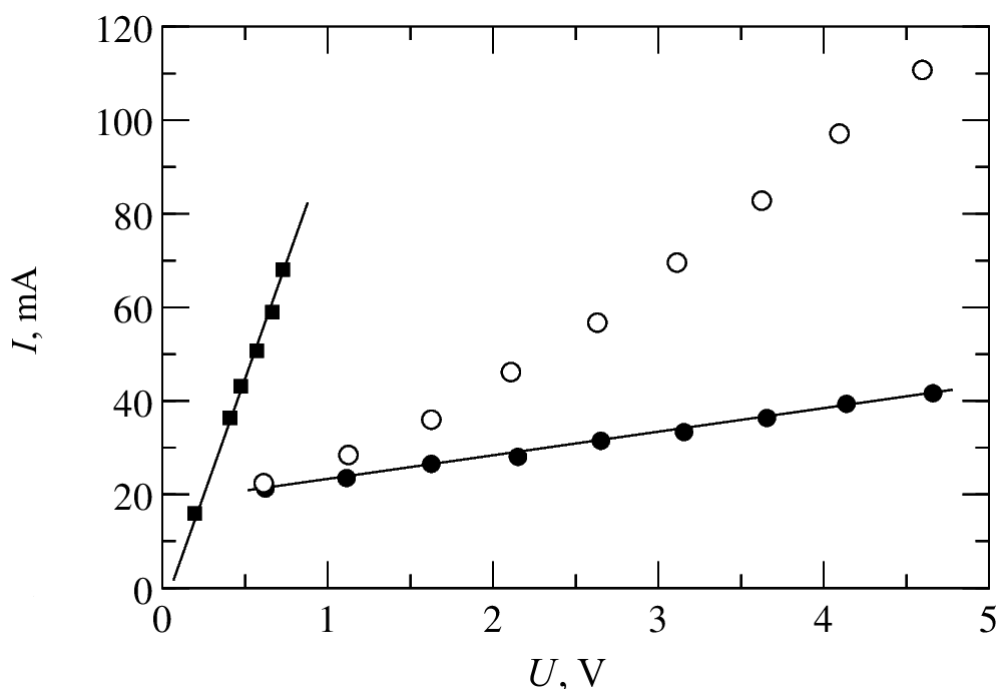
$$\log\{I - I_0\} = \alpha \log\{\mathcal{E}\} + \log\left\{\frac{A}{CD^\alpha}\right\}. \quad (8)$$

Widać więc, że mierząc napięcie przyłożone do silnika oraz natężenie prądu płynącego przez jego uzwojenie można wyznaczyć wykładnik  $\alpha$  wiążący moment oporu aerodynamicznego powietrza z prędkością obrotową śmigiełka  $\omega$ .

### Część doświadczalna

W rozwiązaniu autorskim użyto silniczka modelarskiego na napięcie 4,5 V i śmigiełka do modeli lotniczych. Silniczek został zamocowany w uchwycie laboratoryjnym. Następnie zestawiono obwód pomiarowy według schematu przedstawionego na rys. 1. Wykonane zostały trzy serie pomiarów natężenia prądu  $I$  płynącego przez silniczek w zależności od napięcia  $U$  na jego zaciskach, dla silnika z zablokowanym wirnikiem, silnika pracującego bez śmigła oraz silnika z założonym na oś śmigłem. Wyniki pomiarów przedstawiono na rys. 2.

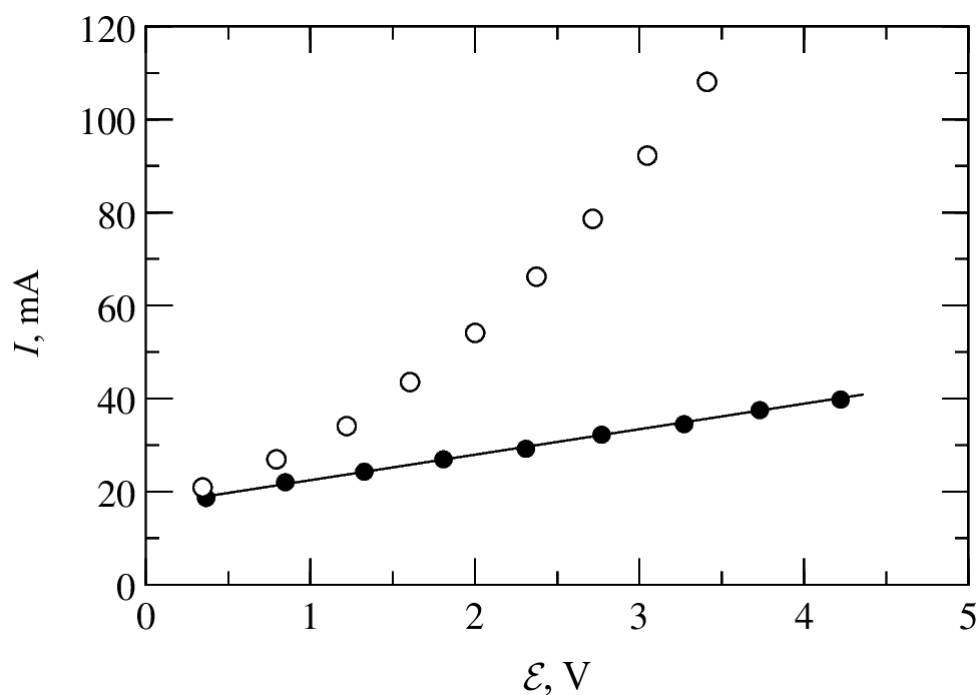
<sup>1</sup>Ponieważ argumenty dla log powinny być liczbami więc, przy red. zadania, do oznaczania wartości liczbowych wielkości fizycznych przyjęto najprostszy sposób – nawias klamrowy. W równaniu (5), tzw. równaniu wartości liczbowych, wartości wielkości fizycznych muszą być w odpowiednio dobranym układzie jednostek – układzie jednostek spójnych (SI) lub jednorodnych (w których występują krotności jednostek).



Rys. 2. Zależności natężenia prądu płynącego od napięcia dla silnika zablokowanego (kwadraciki), nieobciążonego (kółeczka z krzyżykami) i ze śmigłem (kółeczka)

Najprostsza do analizy jest pierwsza seria – pomiary przy zablokowanej osi silnika. Zależność napięcia  $U$  na zaciskach silnika od natężenia prądu  $I$  opisana jest prawem Ohma. Dla wyników doświadczenia (kwadraciki) dopasowano prostą – linia ciągła na rys. 2. Dla tej prostej, z regresji liniowej, otrzymaną wartość oporu  $R_w = 10,8 \Omega$  niepewnością pomiaru  $u(R_w) = 0,1 \Omega$ , którą można interpretować jako opór wewnętrzny silnika czyli opór uzwojenia – komutatora i doprowadzeń. Wykonując pomiary przy zablokowanej osi silnika należy zwrócić uwagę, aby prąd nie przekroczył dopuszczalnej wartości, co mogłoby doprowadzić do spalania uzwojenia.

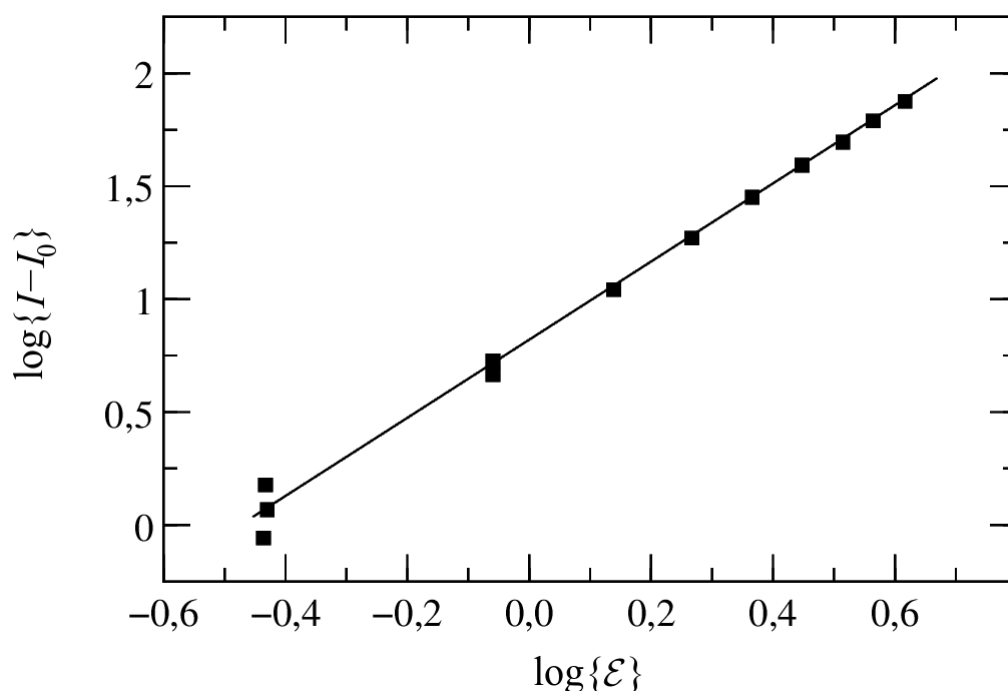
Następnym etapem analizy wyników doświadczenia jest przedstawienie natężenia prądu w zależności od napięcia indukowanego  $\mathcal{E}$  – rys. 3. Napięcie indukowane  $\mathcal{E}$  obliczone zostało na podstawie wzoru (4) jako  $\mathcal{E} = U - IR_w$ .



Rys. 3. Wyniki pomiarów wraz z prostą najlepszego dopasowania dla zależności natężenia prądu od napięcia indukowanego  $\mathcal{E}$ . Oznaczenia: dla silnika nieobciążonego – kółeczka z krzyżykami, dla silnika ze śmigłem – kółeczka.

Jak widać na rys. 3, wyniki pomiarów dla silnika bez obciążenia dobrze układają się na prostej. Dla tej prostej – najlepszego dopasowania, postaci  $y = ax + b$ , z regresji liniowej otrzymano następujące wartości liczbowe współczynników:  $a = 5,00$  o niepewności  $u(a) = 0,04$ ;  $b = 18,20$  o niepewności  $u(b) = 0,15$ .

Dla różnicy natężeń  $I - I_0$  zmierzonych dla silniczka ze śmigłem i silnika nieobciążonego, wykreślono na rys. 4 zależność wartości liczbowej  $\log\{I - I_0\}$  od  $\log\{\mathcal{E}\}$ .



Rys. 4. Odpowiednio przeliczone wyniki pomiarów wraz z prostą najlepszego dopasowania dla zależności  $\log\{I - I_0\}$  od  $\log\{\mathcal{E}\}$ , gdzie jednostką  $I$ ,  $I_0$  jest mA ( $[I] = [I_0] = \text{mA}$ ) a jednostką  $\mathcal{E}$  jest V ( $[\mathcal{E}] = \text{V}$ ). Dla tej prostej, z regresji liniowej, otrzymano wartość współczynnika nachylenia  $a = 1,87$  o niepewności  $u(a) = 0,02$ .

Otrzymany wynik bardzo dobrze opisuje zależność liniowa (8), wyprowadzona w części teoretycznej. Wartość współczynnika nachylenia prostej najlepszego dopasowania (rys. 4), wynosi  $a = 1,87$  a niepewność pomiaru  $u(a) = 0,02$ .

**Komentarz** sekretarza naukowego ds. zad. doświadczalnych (A. Wysmołek)

Za poprawne rozwiązanie zadania można było uzyskać 20 pkt. (10 pkt. za część teoretyczną i 10 pkt. za część doświadczalną). Niestety tylko nieliczni uczniowie rozwiązali je poprawnie. Duża część uczniów nie zauważyła, że moment sił wytwarzany przez silnik jest proporcjonalny do płynącego przez jego uzwojenia prądu. Częstym błędem było założenie, że prędkość obrotowa osi silnika jest proporcjonalna do napięcia na jego zaciskach. Sytuacja taka jest w sprzeczności z obserwacją, że silnik zwalnia ze wzrostem oporów ruchu, ponadto pobiera ze źródła (o stałym napięciu) coraz większy prąd. Takie zachowanie zgodne jest z równaniem (4) opisującym zależność napięcia zasilania  $U$  od indukowanej w uzwojeniu silnika siły elektromotorycznej  $\mathcal{E}$ . Jeśli bowiem obciążenie silnika wzrośnie, to aby je pokonać, silnik musi wytworzyć większy moment sił  $M_s$ , co oczywiście spowoduje wzrost prądu w jego uzwojeniu, a co za tym idzie zwiększenie spadku napięcia na oporze wewnętrznym  $R_w$  silnika. W takiej sytuacji, przy założeniu stałej wartości napięcia zasilania  $U$ , zgodnie z równaniem (4) siła elektromotoryczna  $\mathcal{E}$  indukowana w uzwojeniu silnika musi zmaleć, a ponieważ jest ona proporcjonalna do prędkości obrotowej silnika, to ta ostatnia musi również się zmniejszyć. W przypadku gdy obciążenie silnika jest niewielkie, prąd płynący przez jego uzwojenie, a zatem i spadek napięcia na oporze wewnętrznym jest niewielki. Wtedy dla zrównoważenia napięcia zasilania siła elektromotoryczna musi być duża, a to oznacza wzrost prędkości obrotowej. Mówiąc żartobliwie, równanie (4) wyraża wiedzę silnika o tym, czy ma się obracać szybko czy powoli.

**Punktacja**

Część teoretyczna ..... 10 pkt.  
Część doświadczalna ..... 10 pkt.