XLV OLIMPIADA FIZYCZNA
(1995/1996)
ZAWODY I STOPNIA
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Zadanie teoretyczne — T2

Nazwa - Ładunek i kula przewodząca
Źródła - Paweł Janiszewski, Jan Mostowski (red.): *50 lat olimpiad fizycznych. Wybrane zadania z rozwiązaniami*, PWN, Warszawa 2002;
- T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl

W odległości R od powierzchni kuli przewodzącej o promieniu R znajduje się punktowy ładunek q. Oblicz wielkość ładunku, jakim powinna być naelektryzowana kula, by siła elektrostatyczna działająca na ładunek q była równa zero.

Rozwiązanie zadania T2 — XLV OF, I stopień

Część teoretyczna

Zadanie można rozwiązać metodą obrazów. Idea tej metody polega na dobraniu takich fikcyjnych ładunków punktowych wewnątrz przewodnika, które wraz z ładunkami danymi wytwarzałyby pole, dla którego powierzchnia danego przewodnika pokrywałaby się z jedną z powierzchni stałego potencjału pola. W przypadku przewodnika kulistego umieszczonego w pobliżu punktowego ładunku q istnieje taki obraz q' ładunku q leżący na prostej łączącej punkt położenia q ze środkiem kuli, że potencjał wytworzony przez q i q':

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'}\right), \tag{1}$$

przyjmuje wartość zero na powierzchni kuli o promieniu R, (rys. 1). Wielkość ładunku q' oraz jego odległość d od środka kuli wyznaczamy z warunku $\phi = 0$ na powierzchni przewodnika:

$$\frac{q'}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q}{\sqrt{(x-2R)^2 + y^2 + z^2}} = 0, \tag{2}$$

gdzie x, y, z są współrzędnymi dowolnego punktu leążcego na powierzchni kuli, $x^2+y^2+z^2 = R^2$ (pominęliśmy nieistotny w tym równaniu czynnik $1/(4\pi\varepsilon_0)$. Podstawiając $y^2 + z^2 = R^2 - x^2$ do (1) otrzymujemy równanie (X jest osią symetrii układu):

$$q'^2(5R^2 - 4Rx) = q^2(R^2 + d^2 - 2xd), \tag{3}$$

które powinno być spełnione dla dowolnych wartości x. Zatem wyrazy przy jednakowych potęgach x po obu stronach równania (2) muszą być sobie równe. W wyniku przyrównania tych wyrazów dostajemy układ dwóch równań:

$$q'^2 = \frac{q^2}{5}\left[1 + \left(\frac{d}{R}\right)^2\right], \tag{4}$$

$$q' = q^2\frac{d}{2R}, \tag{5}$$

których rozwiązaniem jest (z równania (1) widać, że znaki ładunków q i q' są różne):

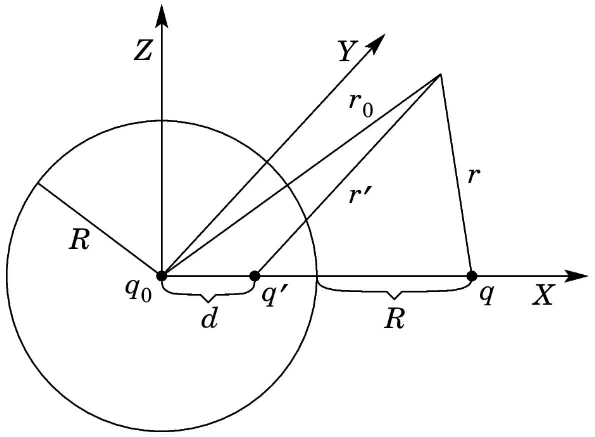
$$q' = -\frac{q}{2} \quad \text{oraz} \quad d = \frac{R}{2}. \tag{6}$$

W polu elektrycznym na zewnątrz przewodnika działa na ładunek q taka siła, jaka działałaby na fikcyjny ładunek q', czyli:

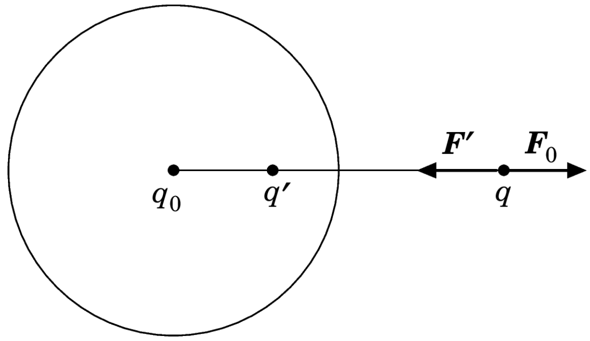
$$F' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2(2R - R/2)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(2/9)q^2}{R^2}. \tag{7}$$

Zauważmy, że możemy jeszcze umieścić w środku kuli dowolny ładunek q_0 zachowując przy tym stały potencjał na jej powierzchni. Potencjał wypadkowego pola od trzech ładunków q, q' i q_0 jest określony wzorem:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} + \frac{q_0}{r_0}\right). \tag{8}$$



Rys. 1. Zależność mocy P silnika od częstości obrotów.



Rys. 2. Zależność siły F od prędkości.

Wartość q_0 wyznaczamy z warunku zerowania się siły wypadkowej działającej na ładunek q (rys. 2):

$$|\mathbf{F}' + \mathbf{F}_0| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{(2/9)q^2}{R^2} + \frac{q_0 q}{(2R)^2}\right) = 0, \tag{9}$$

skąd:

$$q_0 = \frac{8}{9}q. \tag{10}$$

Całkowity ładunek, jakim należy naładowac kulę jest więc równy:

$$Q = q' + q_0 = \frac{7}{18}q. \tag{11}$$

Wartość sumy ładunków fikcyjnych jest równa wartości rzeczywistego ładunku elektrycznego, który znajduje sie na powierzchni kuli. Można to wykazać stosując prawo Gaussa do powierzchni otaczającej naładowaną kulę. Strumień pola elektrycznego przez tę powierzchnię (pole na zewnątrz kuli jest identyczne dla rozkładów fikcyjnych i rzeczywistych ładunków) jest identyczny dla fikcyjnych i rzeczywistych ładunków, a więc suma ładunków fikcyjnych jest równa sumie ładunków rzeczywistych otoczonych rozważaną powierzchnią.

Punktacja