XLV OLIMPIADA FIZYCZNA

(1995/1996)

ZAWODY I STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Zadanie teoretyczne — T3

Nazwa - Pocisk wystrzelony z działa wzdłuż południka na orbitę Ziemi

Źródła - Paweł Janiszewski, Jan Mostowski (red.): *50 lat olimpiad fizycznych. Wybrane zadania z rozwiązaniami*, PWN, Warszawa 2002;
- T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl

Na szerokości geograficznej północnej $\phi_0 = 30^\circ$ na szczycie góry ustawiono działo. Lufa działa została skierowana poziomo dokładnie wzdłuż południka, w kierunku północnego bieguna geograficznego Ziemi. Z działa wystrzelono pocisk wprowadzając go na orbitę kołową wokół Ziemi. Przyjmując, że okres obrotu Ziemi wokół własnej osi wynosi $T = 24$ h, promień Ziemi jest równy $R = 6400$ km oraz przyspieszenie grawitacyjne ma wartość $g = 9,8$ m/s^2, oblicz maksymalną szerokość geograficzną, jaką osiągnie wystrzelony pocisk.

Przyjmij, że Ziemia jest w przybliżeniu jednorodną kulą i zaniedbaj opory ruchu pocisku.

Rozwiązanie zadania T3 — XLV OF, I stopień

Część teoretyczna

W układzie inercjalnym związanym ze środkiem Ziemi prędkość liniowa pocisku poruszającego się po orbicie kołowej o promieniu R (w rzeczywistości nieco większym od promienia Ziemi) wynosi:

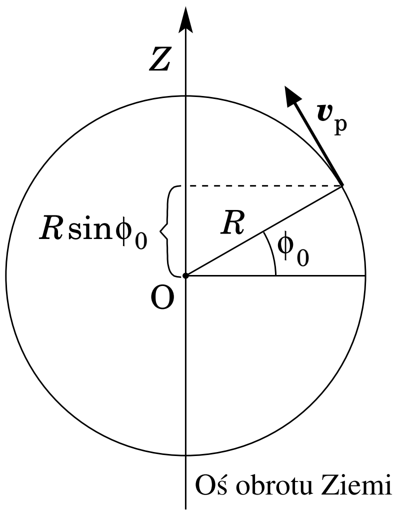
$$v = \sqrt{Rg}. \tag{1}$$

W chwili wystrzału prędkość $\mathbf{v}$ składa się z dwóch wzajemnie prostopadłych składowych stycznych do powierzchni Ziemi – składowej v_l związanej z obrotem Ziemi z częstością kołową $\Omega = 2\pi/T$:

$$v_\mathrm{l} = R\Omega\cos\phi_0, \tag{2}$$

oraz składowej v_p nadanej przez działo w kierunku bieguna (rys. 1):

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{v^2 - v_\mathrm{l}^2} = \sqrt{Rg - R^2\Omega^2\cos\phi_0}. \tag{3}$$



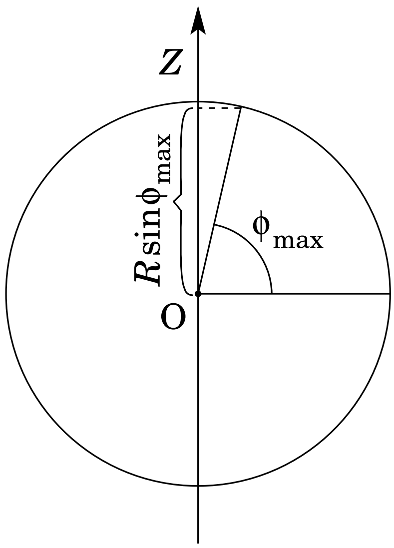
Rys. 1

Wystrzelony pocisk będzie zataczał koło wielkie w płaszczyźnie przecinającej kulę Ziemską pod kątem ϕ_max określającym maksymalną szerokość geograficzną osiąganą przez pocisk. Ponieważ ruch pocisku po okręgu jest jednostajny, to rzut prostopadły punktu położenia pocisku na płaszczyznę rysunku 2 wykonuje ruch harmoniczny o częstości kołowej:

$$\omega = \frac{v}{R} = \sqrt{\frac{g}{R}}. \tag{4}$$

Współrzędna z (oś Z jest skierowana wzdłuż osi obrotu Ziemi) punktu położenia pocisku zależy więc od czasu t jak:

$$z = R\sin\phi_\mathrm{max}\sin(\omega t + \delta). \tag{5}$$



Rys. 2

Współrzędna prędkości $v_z = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ jest w chwili t równa:

$$v_z = R\omega \sin\phi_{\max} \cos(\omega t + \delta). \tag{6}$$

Tuż po wystrzale w chwili t_0, gdy pocisk znajdował się na szerokości geograficznej ϕ_0, współrzędne z i v_z wynosiły odpowiednio (rys. 2):

$$z = R\sin\phi_0, \tag{7}$$

$$v_z = v_{\mathrm{p}} \cos\phi_0. \tag{8}$$

Przyrównując (5) do (7) i (6) do (8) dostajemy dla chwili t_0 równania:

$$\sin\phi_{\max} \sin(\omega t_0 + \delta) = \sin\phi_0, \tag{9}$$

$$R\omega \sin\phi_{\max} \cos(\omega t_0 + \delta) = v_{\mathrm{p}} \cos\phi_0. \tag{10}$$

Korzystając z tożsamości: $\sin^2(\omega t_0 + \delta) + \cos^2(\omega t_0 + \delta) = 1$ oraz z równań (3) i (4) otrzymujemy:

$$\sin\phi_{\max} = \sqrt{1 - \frac{R\Omega^2}{g}\cos^4\phi_0} = 0,999028, \tag{11}$$

gdzie podstawiliśmy $\Omega = 2\pi/T$. Maksymalna szerokość geograficzna osiągana przez pocisk wynosi więc:

$$\phi_{\max} = 87,5^\circ. \tag{12}$$

Punktacja