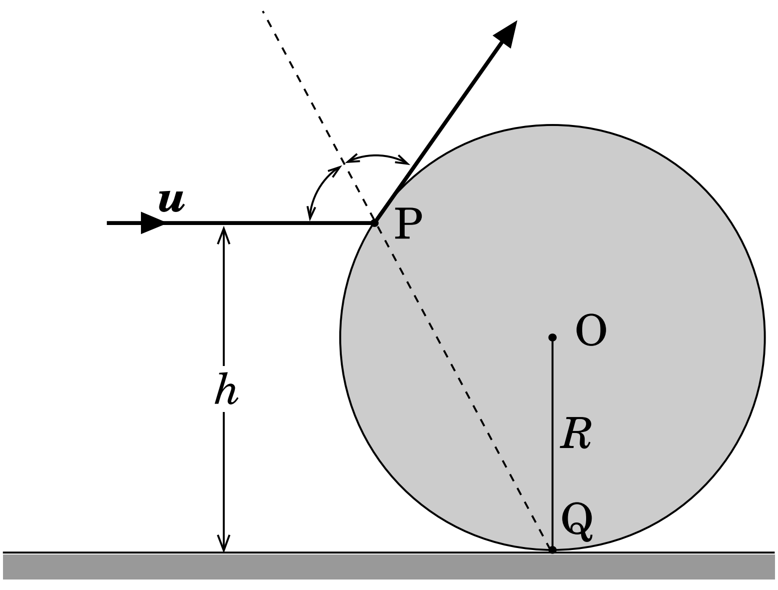
XLIV OLIMPIADA FIZYCZNA
(1995/1996)
ZAWODY II STOPNIA
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Zadanie teoretyczne — T2

Nazwa - Zderzenie z walcem
Źródła - Paweł Janiszewski, Jan Mostowski (red.): *50 lat olimpiad fizycznych. Wybrane zadania z rozwiązaniami*, PWN, Warszawa 2002;
- T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl

W sztywny, jednorodny walec o promieniu R, spoczywający na sztywnym poziomym podłożu, uderza pocisk. Masy walca i pocisku są jednakowe. Tor pocisku leży w płaszczyźnie pionowej, prostopadłej do osi symetrii walca i dzielącej walec na dwie jednakowe części. Tuż przed zderzeniem pocisk ma prędkość $\mathbf{u}$ skierowaną poziomo. W wyniku zderzenia walec toczy się po podłożu bez poślizgu, zaś wektor prędkości odbitego pocisku tworzy z prostą przechodzącą przez punkty P i Q taki sam kąt, jaki tworzył z tą prostą wektor $\mathbf{u}$ (przed zderzeniem), rys. 1. P i Q są punktami styku walca z pociskiem oraz z podłożem w chwili początkowej zderzenia. Zakładamy dla uproszczenia, że zderzenie jest doskonale sprężyste oraz że współczynnik tarcia walca o podłoże jest równy zero.

Oblicz wysokość h na jakiej nastąpiło zderzenie, wiedząc, że $R < h < 2R$.



Rys. 1. Schemat układu przed zderzeniem

Rozwiązanie zadania T2 — XLIV OF, II stopień

Część teoretyczna

Oznaczmy przez m masę pocisku oraz masę walca, przez u i v – prędkości pocisku przed i po zderzeniu, a przez V i ω – odpowiednio prędkość liniową środka masy i prędkość kątową walca po zderzeniu. Z zasad zachowania energii, pędu (w kierunku poziomym) i momentu pędu układu, np. względem początkowego położenia środka O walca (rys. 2), mamy:

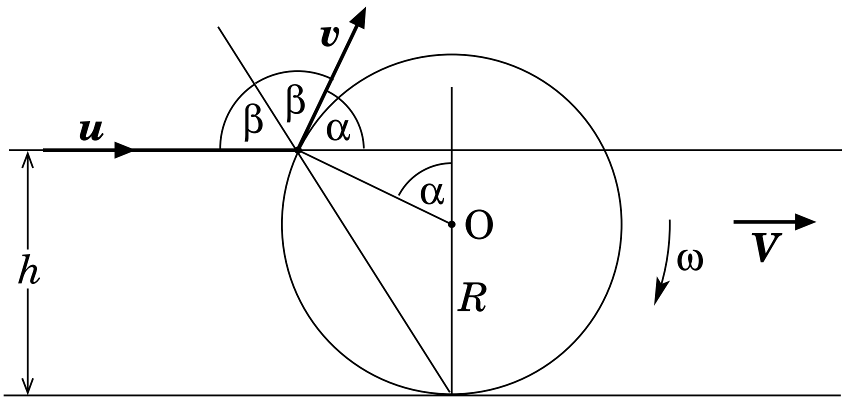
$$\frac{mu^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{(mR^2/2)\omega^2}{2} + \frac{mV^2}{2}, \tag{1}$$

$$mu = mv\cos\alpha + mV, \tag{2}$$

$$(h-R)mu = Rmv + \frac{mR^2}{2}\omega, \tag{3}$$

gdzie $\cos\alpha = (h-R)/R$ będziemy dalej oznaczać przez x:

$$x = \cos\alpha = (h-R)/R. \tag{4}$$



Rys. 2. Schemat układu przed i po zderzeniu

Dla $V = \omega R$ mamy układ trzech równań na v/u, V/u oraz x:

$$1 = \left(\frac{v}{u}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{V}{u}\right)^2, \tag{5}$$

$$1 = x\frac{v}{u} + \frac{V}{u}, \tag{6}$$

$$x = \frac{v}{u} + \frac{1}{2}\frac{V}{u}. \tag{7}$$

Rozwiązujemy ten układ podstawiając np. v/u z (6) do (4) oraz (5), a następnie odejmując (4) od (5) stronami. Po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{8}$$

Rozwiązanie ujemne jest sprzeczne z warunkiem $R < h < 2R$. Pozostaje zatem $x = 1/\sqrt{2}$, któremu odpowiada:

$$h = R(1+x) = R\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{9}$$

Punktacja