XLV OLIMPIADA FIZYCZNA
ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Nazwa zadania Kondensator cylindryczny z przewodem.
Rok 1995/1996
Źródło 50 lat olimpiad fizycznych. Wybrane zadania z rozwiązaniami pod red. Janiszewski P. Mostowski J. PWN, Warszawa 2002; T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

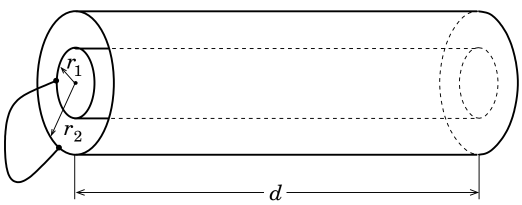
Zadanie 3 – XLV OF, II stopień.

Kondensator cylindryczny (próżniowy) o długości d składa się z dwóch współosiowych cylindrów o promieniach r_1 i r_2, Rys. 1. Okładki tego kondensatora są połączone przewodem, a ładunki na każdej z nich są początkowo równe zero. Drugi cylindryczny kondensator o takiej samej długości podłączono do baterii i naładowano do napięcia U. Po odłączeniu wsunięto go współosiowo między okładki pierwszego kondensatora jak na rysunku 2.

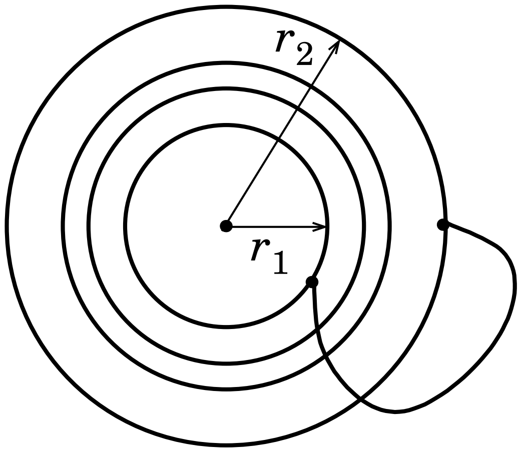
Oblicz ładunek jaki przepłynął przewodem łączącym okładki pierwszego kondensatora.

Zaniedbaj ładunek na tym przewodzie oraz zaburzenie pola na końcach cylindrów.

Uwaga: $\int(1/x)\mathrm{d}x = \ln x + C$, gdzie ln oznacza logarytm przy podstawie $e = 2,718\ldots$.



Rysunek 1



Rysunek 2

Rozwiązanie zadania 3 – XLV OF, II stopień.

Przyjmijmy promienie cylindrów drugiego kondensatora równe a i b ($a < b$) oraz załóżmy, że ładunek na jego zewnętrznej okładce po naładowaniu wynosił q. Przyjmijmy, że po wsunięciu tego kondensatora na okładkach pierwszego wyindukują się ładunki Q i $-Q$, Rys. 3. Ze względu na symetrię osiową układu pole elektryczne między okładkami kondensatorów jest skierowane radialnie. Rozważając współosiową powierzchnię cylindryczną o promieniu r otrzymujemy z prawa Gaussa:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 E_\mathrm{r} 2\pi r d &= Q \quad \text{czyli} \quad E_\mathrm{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 d}\frac{1}{r} \qquad \text{gdy} \qquad r_1 < r < a \ , \\
\varepsilon_0 E_\mathrm{r} 2\pi r d &= Q - q \quad \text{czyli} \quad E_\mathrm{r} = \frac{Q-q}{2\pi\varepsilon_0 d}\frac{1}{r} \qquad \text{gdy} \qquad a < r < b \ , \\
\varepsilon_0 E_\mathrm{r} 2\pi r d &= Q \quad \text{czyli} \quad E_\mathrm{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 d}\frac{1}{r} \qquad \text{gdy} \qquad b < r < r_2 \ ,
\end{aligned}$$

gdzie ε_0 oznacza przenikalność elektryczną próżni. Różnice potencjałów pomiędzy kolejnymi cylindrami są równe:

$$\begin{aligned}
V_{r_1 a} &= \int_{r_1}^{a} E_\mathrm{r} \mathrm{d}r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 d} \ln\frac{a}{r_1} \ , \\
V_{ab} &= \int_{a}^{b} E_\mathrm{r} \mathrm{d}r = \frac{Q-q}{2\pi\varepsilon_0 d} \ln\frac{b}{a} \ , \\
V_{br_2} &= \int_{b}^{r_2} E_\mathrm{r} \mathrm{d}r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 d} \ln\frac{r_2}{b} \ .
\end{aligned}$$

Ponieważ różnica potencjałów między zwartymi okładkami pierwszego kondensatora jest równa zero, to

$$V_{r_1 a} + V_{ab} + V_{br_2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 d}\left[Q\ln\frac{a}{r_1} + (Q-q)\ln\frac{b}{a} + Q\ln\frac{r_2}{b}\right] = 0 \ ,$$

skąd:

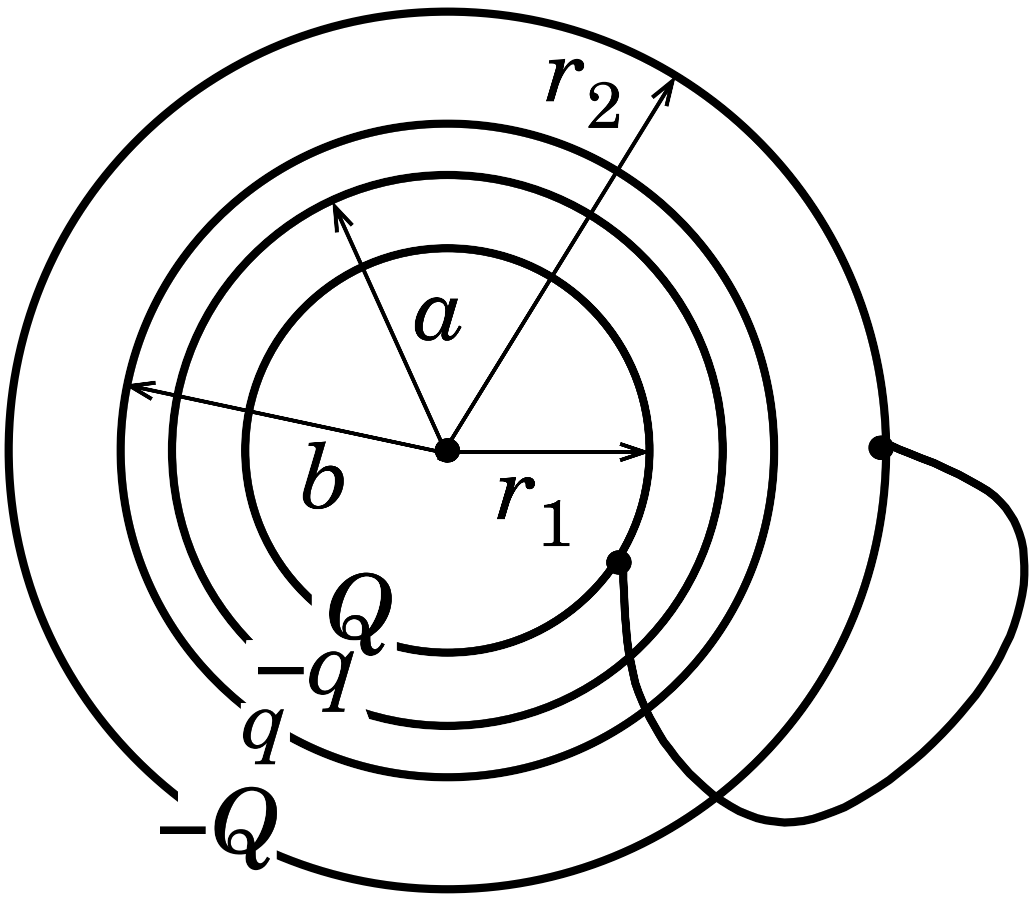
$$Q = q\frac{\ln(b/a)}{\ln(a/r_1) + \ln(b/a) + \ln(r_2/b)} = q\frac{\ln(b/a)}{\ln(r_2/r_1)} \ .$$

Dla drugiego kondensatora przed wsunięciem między okładki pierwszego mamy, zgodnie z prawem Gaussa, $E'_\mathrm{r} = -q(2\pi\varepsilon_0 d)/r$, czyli:

$$U = \left|\int_a^b E'_\mathrm{r} \mathrm{d}r\right| = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 d}\ln\frac{b}{a} \ ,$$

gdzie przyjęliśmy $q > 0$ oraz $U > 0$. Ostatecznie otrzymujemy:

$$Q = U\frac{2\pi\varepsilon_0 d}{\ln(r_2/r_1)} \ .$$



Rysunek 3