XLV OLIMPIADA FIZYCZNA

ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Nazwa zadania	Strzelanie z działa na wschód.
Rok	1995/1996
Źródło	50 lat olimpiad fizycznych. Wybrane zadania z rozwiązaniami pod red. Janiszewski P. Mostowski J. PWN, Warszawa 2002; T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Zadanie 1 – XLV OF, III stopień.

W punkcie P na powierzchni Ziemi, na szerokości geograficznej $\phi = 60^\circ$ znajduje się dzialo. Lufa działa jest ustawiona poziomo i skierowana na wschód. Pociski wystrzeliwane z tego działa mogą poruszać się po różnych orbitach wokółziemskich.

1. Jaki jest najkrótszy czas τ, po którym może nastąpić spotkanie wystrzelonego pocisku z punktem P?
2. Oblicz najmniejszą prędkość wystrzelonego pocisku względem P, dla której nastąpi jego spotkanie z punktem P po czasie τ.

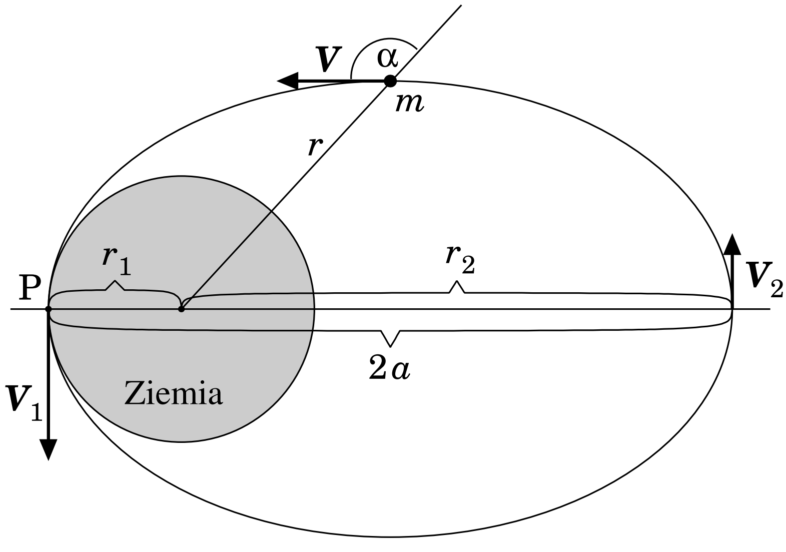
Nie uwzględniaj istnienia atmosfery oraz przyjmij, że środek Ziemi spoczywa w układzie inercjalnym.

Do obliczeń przyjmij następujące dane:

- stała grawitacyjna: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2;
- masa Ziemi: $M = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg;
- promień Ziemi: $R = 6,36 \cdot 10^6$ m;
- okres obrotu Ziemi wokół osi: $T = 8,62 \cdot 10^4$ s.

Rozwiązanie zadania 1 – XLV OF, III stopień.

1. Pocisk krążący po orbicie eliptycznej tuż przy powierzchni Ziemi wykonuje kilkanaście okrążeń w ciągu doby. Im większy jest rozmiar elipsy, tym dłuższy jest okres obiegu pocisku (III prawo Keplera). Można zatem tak dobrać prędkość początkową pocisku V_1 (Rys. 1), by całkowita wielokrotność obiegu była równa T. Najkrótszy czas τ jest więc równy T.



Rysunek 1

2. Związek między prędkością pocisku V w układzie inercjalnym związanym ze środkiem Ziemi a prędkością pocisku v względem punktu P w chwili wystrzału jest następujący ($\omega = 2\pi/T$):
$$V = v + R\omega\cos\varphi \ . \tag{1}$$
Dla orbity kołowej o promieniu R z centrum w środku Ziemi mamy:
$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{mV_0^2}{R}, \tag{2}$$
skąd otrzymujemy okres obiegu pocisku:
$$T_0 = \frac{2\pi R}{V_0} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \ . \tag{3}$$
Z III prawa Keplera dostajemy zależność:
$$T_1^2 = \frac{a^3}{R^3}T_0^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \ , \tag{4}$$
gdzie T_1 jest okresem obiegu pocisku po elipsie, której półoś wielka wynosi a. Korzystając teraz ze związku między a i całkowitą energią pocisku E [1]:
$$a = -\frac{GMm}{2E} \ , \tag{5}$$

[1]Całkowitą energię $E = (mV^2/2) - (GMm/r)$, gdzie r jest odległością masy m od środka Ziemii, można wyrazić poprzez całkowity moment pędu $L = mVr\sin\alpha$, a mianowicie $E = L^2/(2mr^2\sin^2\alpha) - GMm/r$, Rys. 1. Moment pędu L, tak jak i energia E, nie zmienia się podczas ruchu masy m. W punkcie przecięcia wielkiej półosi z elipsą prędkość masy m jest prostopadła do promienia wodzącego o początku w jednym z ognisk elipsy. Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 1 mamy: $L = mV_1r_2 = mV_2r_2$. Zatem $x = r_1$ oraz $x = r_2$ są rozwiązaniami równania $E = L^2/(2mx^2) - GMm/x$. Jest to równanie kwadratowe ze względu na x. Suma pierwiastków tego równnia jest równa $r_1 + r_2 = -GMm/E$, a z drugiej strony jest równa podwojonej długości wielkiej półosi elipsy.

gdzie E jest wielkością stałą i w związku z tym możemy ją obliczyć np. dla chwili początkowej:

$$E = \frac{mV_1^2}{2} - \frac{GMm}{R} \ , \tag{6}$$

dostajemy:

$$a = \left(\frac{2}{r} - \frac{V_1^2}{GM}\right)^{-1} \ . \tag{7}$$

Po podstawieniu (7) do wzoru (4) otrzymujemy:

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{GM}\left(\frac{2}{R} - \frac{V_1^2}{GM}\right)^{-3} \ . \tag{8}$$

Ponieważ warunkiem spotkania pocisku z punktem P powierzchni Ziemi jest równość:

$$nT_1 = T \qquad (n \text{ – liczba naturalna}) \ , \tag{9}$$

to:

$$V_1^2 = GM\left(\frac{2}{R} - \sqrt[3]{\frac{4\pi^2 n^2}{GMT^2}}\right) \ . \tag{10}$$

Warunkiem koniecznym obiegu pocisku po elipsie o półosi $a \geqslant R$ jest:

$$V_1 \geqslant V_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}} \ . \tag{11}$$

Zatem musi być spełniona nierówność:

$$\frac{1}{R} \geqslant \sqrt[3]{\frac{4\pi^2 n^2}{T^2}} = \left(\frac{nT_0}{T}\right)^{2/3} \frac{1}{R} \ , \tag{12}$$

czyli:

$$n \leqslant \frac{T}{T_0} \ . \tag{13}$$

Stosunek T/T_0 ma wartość $17,07$. Największą liczbą n spełniającą nierówność (13) jest więc $n = 17$. Liczbie $n = 17$ odpowiada więc najmniejsza prędkość V_1 określona przez równanie (10):

$$V_1 = 7,93 \text{ km/s} \ .$$

Prędkość V_1 jest tylko nieco większa od pierwszej prędkości kosmicznej. Następnie, korzystając z (1), obliczamy najmniejszą prędkość pocisku wystrzelonego względem punktu P:

$$v = V_1 - R\omega\cos\varphi = 7,7 \text{ km/s} \ .$$