# XLV OLIMPIADA FIZYCZNA
## ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA
### CZĘŚĆ TEORETYCZNA

**Nazwa zadania** Nagrzewający się przewodzący pierścień spadający w niejednorodnym polu magnetycznym.
**Rok** 1995/1996
**Źródło** 50 lat olimpiad fizycznych. Wybrane zadania z rozwiązaniami pod red. Janiszewski P. Mostowski J. PWN, Warszawa 2002; T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

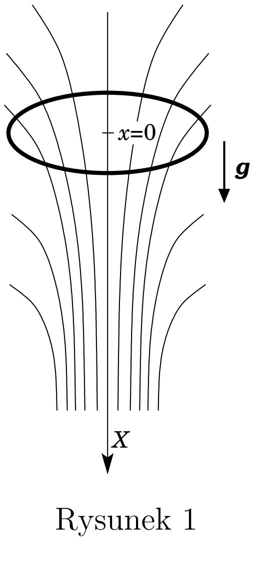
---

**Zadanie 2 – XLV OF, III stopień.**

Przy powierzchni Ziemi (przyspieszenie grawitacyjne $g$), w stałym niejednorodnym polu magnetycznym, osiowo-symetrycznym wokół pionowej osi $X$ (Rys. 1), opada cienki, jednorodny pierścień przewodzący o oporze $R$ i masie $m$. W chwili początkowej $t = 0$ pierścień spoczywa poziomo, zaś jego środek znajduje się w punkcie $x = 0$. W czasie ruchu płaszczyzna pierścienia jest prostopadła do osi $X$. Linie pola magnetycznego mają taki kształt, że dla poziomo ustawionego pierścienia, którego środek znajduje się w punkcie $x$, strumień magnetyczny $\Phi$ przechodzący przez ten pierścień jest równy: $\Phi = \Phi_0 + bx$.

Przedstaw szybkość $M = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$, z jaką jest wydzielane ciepło $Q$ w pierścieniu, jako funkcję czasu $t$. Zaniedbaj zmiany pola magnetycznego spowodowane przepływem prądu w pierścieniu.

**Uwaga!** Rozwiązaniem ogólnym równania: $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = B - Ay$, gdzie $A$ i $B$ są stałymi, jest:
$y = (B/A)\big(1 - \mathrm{const} \cdot \exp(-At)\big)$.




Rysunek 1

**Rozwiązanie zadania 2 – XLV OF, III stopień.**

Energia mechaniczna pierścienia znajdującego się na wysokości odpowiadającej współrzędnej $x$ oraz mającego prędkość $v$ ($v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$) jest postaci:

$$E_\mathrm{m} = E_0 - mgx + \frac{mv^2}{2} \ , \tag{1}$$

gdzie $E_0$ jest dowolną stałą. Ponieważ całkowita energia jest zachowana, to szybkość wydzielania się ciepła w pierścieniu jest równa szybkości ubywania energii mechanicznej $E_\mathrm{m}$:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = mgv - mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \ . \tag{2}$$

Z drugiej strony to moc elektryczna prądu $I$ wzbudzonego w pierścieniu jest zamieniana na ciepło:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = RI^2 \ . \tag{3}$$

Natężenie prądu $I$ jest proporcjonalne do wartości SEM indukcji $\mathcal{E}_\mathrm{ind}$:

$$I = \frac{|\mathcal{E}_\mathrm{ind}|}{R} = \frac{1}{R}\left|-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{1}{R}\left|-\frac{\mathrm{d}\Phi_z}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{b}{R}v \ . \tag{4}$$

Z równań (3) i (4) dostajemy:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{b^2}{R}v^2 \ , \tag{5}$$

co po podstawieniu do (2) daje równanie:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{b^2}{Rm}v \ . \tag{6}$$

Rozwiązaniem tego równania ruchu (zgodnie z uwagą i warunkiem $v = 0$ dla $t = 0$) jest:

$$v = \frac{Rmg}{b^2}\left(1 - e^{-At}\right) \ , \tag{7}$$

gdzie $A = b^2/(Rm)$. Korzystając z (7) możemy teraz wyrazić $M = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ jako funkcję czasu:

$$M = \frac{Rm^2g^2}{b^2}\left(1 - e^{-At}\right)^2 \ . \tag{8}$$

Po odpowiednio długim czasie $t \gg A^{-1}$ szybkość opadania pierścienia jest w przybliżeniu stała, $v = v_0 = Rmg/b^2$, a szybkość wydzielania ciepła $M$ też praktycznie nie ulega zmianie.