XLVI OLIMPIADA FIZYCZNA
(1996/1997)
ZAWODY II STOPNIA
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Zadanie teoretyczne – T

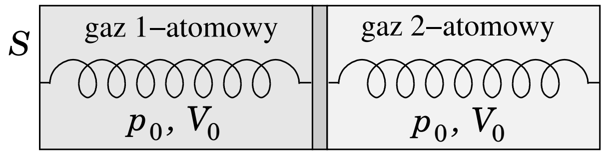
Nazwa – Zmiana położenia tłoku podczas osiągania równowagi przez układ

Źródła – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej
– Andrzej Wysmołek, sekretarz naukowy ds. zad. teoret. KGOF, IFD UW
– Paweł Janiszewski, Jan Mostowski (red.): *50 lat olimpiad fizycznych. Wybrane zadania z rozwiązaniami.* WN PWN, Warszawa 2002
– T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Zadanie Z3 - XLVI OF, II stopień

W środku cylindra znajduje się tłok, do którego są przymocowane końce jednakowych sprężyn, rys. 1. Pole podstawy cylindra wynosi S, współczynnik sprężystości każdej ze sprężyn wynosi k, zaś długość nienapiętej sprężyny jest znikoma. W lewej części cylindra znajduje się gaz jednoatomowy, a w prawej – dwuatomowy. Początkowo oba gazy mają jednakową temperaturę, zajmują jednakowe objętości V_0 i oba są pod ciśnieniem p_0. Gaz jednoatomowy może powoli przenikać przez tłok. Gaz dwuatomowy nie przenika przez tłok. Oblicz odległość o jaką przesunie się tłok podczas osiągania równowagi przez układ.

Wykonaj obliczenia przy założeniu, że tłok przewodzi ciepło, a ścianki cylindra nie przewodzą ciepła oraz że nie ma tarcia między tłokiem i ściankami cylindra. Przyjmij, że pojemność cieplna tłoka, sprężyn i ścianek jest równa zero. Traktuj gazy jako doskonałe.



Rys. 1

Rozwiązanie zadania Z3 - XLVI OF, II stopień

Danymi są p_0, V_0, S, k oraz molowe ciepła właściwe gazów (przy stałej objętości) – jednoatomowego $C_{V1} = (3/2)R$ i dwuatomowego $C_{V2} = (5/2)R$. Liczby moli gazu jednoatomowego i dwuatomowego są jednakowe i równe:

$$n = \frac{p_0 V_0}{R T_0}. \tag{1}$$

Na początku mamy sytuację nierównowagową. Gaz jednoatomowy przenika przez tłok do momentu, w którym ciśnienia gazu jednoatomowego po obu stronach tłoka stają się równe. Załóżmy, że po ustaleniu się równowagi po obu stronach tłoka panuje temperatura T_1. Jeżeli przez tłok przenikło Δn moli gazu jednoatomowego (rys. 2), to muszą zachodzić równości:

$$n - \Delta n = \frac{p_1 V_1}{R T_1}, \tag{2}$$

$$n + \Delta n = \frac{p_2 V_2}{R T_1}. \tag{3}$$

Równość ciśnień cząstkowych gazu jednoatomowego po obu stronach tłoka daje:

$$\frac{n - \Delta n}{V_1} = \frac{\Delta n}{V_2}, \tag{4}$$

gdzie:

$$V_1 + V_2 = 2V_0. \tag{5}$$

Zatem:

$$nV_2 = 2\Delta n V_0. \tag{6}$$

Z równowagi sił działających na tłok mamy:

$$(p_2 - p_1)S = 2kx, \tag{7}$$

zaś z zachowania energii:

$$n(C_{V1} + C_{V2})(T_0 - T_1) = 2k\frac{x^2}{2},$$

czyli:

$$4Rn(T_0 - T_1) = kx^2. \tag{8}$$

Ponadto zachodzi związek:

$$xS = V_2 - V_0. \tag{9}$$

Mamy więc 8 równań (1-8) i 8 niewiadomych: n, Δn, p_1, V_1, p_2, V_2, T_1, x. Z równań (4) i (8) mamy:

$$v_1 = v_0 - Xs, \tag{10}$$

$$V_2 = V_0 + xS. \tag{11}$$

Możemy więc równanie (5) zapisać w postaci:

$$\Delta n = n\frac{V_0 + xS}{2V_0}. \tag{12}$$

Równanie (7) przekształcamy do postaci:

$$T_1 = T_0 - \frac{kx^2}{4nR}, \tag{13}$$

zaś z równań (2), (3) i (6) dostajemy:

$$RT_1 \frac{n(V_1 - V_2) + 2\Delta n V_0}{V_1 V_2} S = 2kx. \tag{14}$$

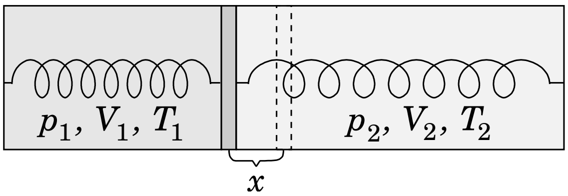
Podstawiając równania (9) – (12) do równania (13), otrzymujemy:

$$RnS\left(T_0 - \frac{kx^2}{4nR}\right) = 2k(V_0 x + Sx^2).$$

Pamiętając, że $n = p_0 V_0/(RT_0)$, otrzymujemy dwa rozwiązania:

$$x = \frac{4}{9}\left(\pm\sqrt{\frac{V_0^2}{S^2} + \frac{9p_0 V_0}{4k}} - \frac{V_0}{S}\right),$$

z których tylko to ze znakiem „+" jest fizyczne, gdyż tłok musi wychylić się w lewo.



Rys. 2