XLVI OLIMPIADA FIZYCZNA
(1996/1997)
ZAWODY III STOPNIA
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

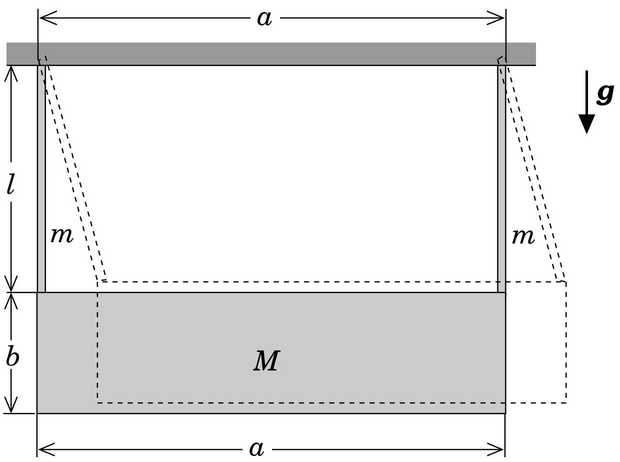
Zadanie teoretyczne – T

Nazwa – Częstość drgań układu

Źródła – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej
– Andrzej Wysmołek, sekretarz naukowy ds. zad. teoret. KGOF, IFD UW
– Paweł Janiszewski, Jan Mostowski (red.): *50 lat olimpiad fizycznych. Wybrane zadania z rozwiązaniami.* WN PWN, Warszawa 2002
– T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Zadanie Z1 - XLVI OF, III stopień

Na dwóch cienkich, jednorodnych prętach o długości l i masie m każdy, zawieszono cienką jednorodną deskę prostokątną o bokach a, b oraz masie M, rys. 1. Oblicz częstość małych drgań układu odbywających się w płaszczyźnie rysunku.



Rys. 1

Rozwiązanie zadania Z1 - XLVI OF, III stopień

Dolne końce prętów, jak również środek masy deski S, poruszają się po łukach okręgów o promieniu l, z tym, że S porusza się po okręgu o środku znajdującym się o $b/2$ poniżej punktów zaczepienia prętów.

Oznaczmy przez φ kąt odchylenia prętów od pionu, rys. 2. Energia kinetyczna każdego z prętów jest równa:

$$T_1 = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}, \tag{1}$$

gdzie $I = (1/3)ml^2$ jest momentem bezwładności pręta względem prostopadłej osi przechodzącej przez jego koniec, a $\dot{\varphi} = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ jest chwilową prędkością kątową pręta.

Deska przemieszcza się ruchem postępowym (nie wykonuje obrotów), zatem energia kinetyczna deski wynosi:

$$T_2 = \frac{M(l\dot{\varphi})^2}{2}, \tag{2}$$

gdzie $l\dot{\varphi} = v$ jest chwilową prędkością środka masy deski. Dla kątów φ dostatecznie małych, dla których możemy przyjąć $\cos\varphi \simeq 1 - \varphi^2/2$, energia potencjalna pręta jest równa:

$$V_1 = -mg\frac{l}{2}\cos\varphi + C_1 = \frac{1}{4}mgl\varphi^2 + C_1', \tag{3}$$

zaś energia potencjalna środka masy deski jest równa:

$$V_2 = -Mgl\cos\varphi + C_2 = \frac{1}{2}Mgl\varphi^2 + C_2', \tag{4}$$

gdzie C_i, C_i' $(i = 1, 2)$ są stałymi, zależnymi od wyboru zera energii potencjalnej. Całkowita energia mechaniczna układu wynosi zatem:

$$E - 2T_1 + T_2 + 2V_1 + V_2 = A\dot{\varphi}^2 + B\varphi^2 + C, \tag{5}$$

gdzie:

$$A = \frac{(2/3)m + M}{2}l^2, \tag{6}$$

$$B = \frac{m + M}{2}lg. \tag{7}$$

Energia E pozostaje stała podczas ruchu, więc jej pochodna jest równa zero:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 2A\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + 2B\varphi\dot{\varphi} = 0, \tag{8}$$

gdzie $\ddot{\varphi}$ oznacza drugą pochodną φ po czasie: $\ddot{\varphi} = \mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}t^2$. Z warunku $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$ dostajemy równanie:

$$\ddot{\varphi} + \frac{B}{A}\varphi = 0, \tag{9}$$

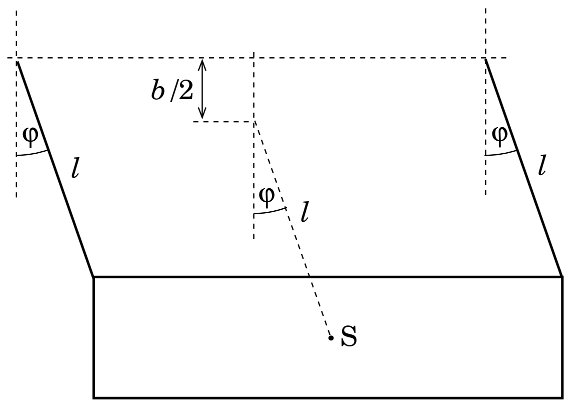
które opisuje ruch harmoniczny o częstości kołowej $\omega = \sqrt{B/\ddot{A}}$. Częstość małych drgań rozważanego układu wynosi więc:

$$\omega = \sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{\frac{M + m}{M + (2/3)m}\frac{g}{l}}. \tag{10}$$

Wartość ω można również otrzymać bez obliczania pochodnej energii E. Wystarczy rozpoznać w (5) równanie odpowiadające ruchowi harmonicznemu. Możemy wtedy założyć $\varphi = a \sin \omega t$, $\dot{\varphi} = \omega a \cos \omega t$. Ponieważ E i C są stałe, to stała w czasie musi być wielkość:

$$A\dot{\varphi}^2 + B\varphi^2 = A\omega^2 a^2 \cos^2 \omega t + Ba^2 \sin^2 \omega t = a^2(\omega^2 A - B) \cos^2 \omega t + Ba^2,$$

czyli musi zachodzić równość $\omega^2 = B/\ddot{A}$.



Rys. 2