XLVII OLIMPIADA FIZYCZNA
(1997/1998)
ZAWODY I STOPNIA
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

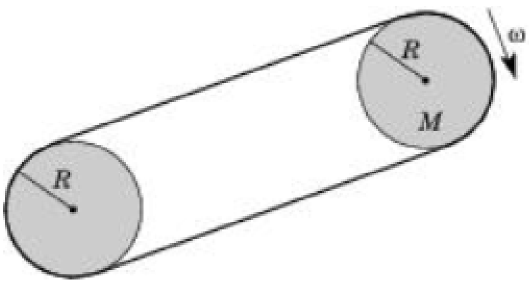
Zadanie teoretyczne – T

Nazwa – Dwa krążki

Źródła – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej
– Andrzej Wysmołek, sekretarz naukowy ds. zad. dośw. KGOF, IFD UW
– T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Zadanie T1 - XLVII OF, stopień I

Krążek o promieniu R jest sztywno przymocowany do płaskiej powierzchni stołu. Krążek jest opasany jednorodną, cienką, wiotką i nierozciągliwą liną o długości całkowitej l i masie m, rys. 1. Drugi jednorodny krążek w kształcie walca o takim samym promieniu R i masie M ślizga się bez tarcia po powierzchni stołu tocząc się po napiętej linie. Układ obraca się wokół nieruchomego krążka z częstością kołową ω. Nie zachodzi poślizg liny po żadnym z dwóch krążków. Oblicz energię kinetyczną układu.



Rys. 1

Rozwiązanie zadania T1 - XLVII OF, stopień I

Środek ruchomego krążka O porusza się z prędkością $v = \omega d$, gdzie

$$d = \frac{l - 2\pi R}{2} \tag{1}$$

jest odległością środków obu krążków. Po czasie Δt środek O obróci się wokół nieruchomego krążka (rys. 2) o kąt

$$\Delta\alpha = \omega \Delta t. \tag{2}$$

Dla małych Δt punkt P liny przebywa drogę

$$\Delta s = \Delta\alpha(d + R) - \Delta\alpha R = \Delta\alpha d, \tag{3}$$

równą drodze przebytej przez środek krążka O. Lina nie ślizga się po krążku, zatem krążek nie wykonuje obrotu wokół osi przechodzącej przez środek O. Ruch krążka jest ruchem postępowym. Energia kinetyczna ruchomego krążka wraz z przylegającą do niego częścią liny jest więc równa

$$E_1 = \frac{(M + m\pi R//l)(\omega d)^2}{2}. \tag{4}$$

Chwilowa prędkość punktów Q i Q′ liny jest równa zero (część liny przylegająca do nieruchomego krążka spoczywa), odcinki liny nie przylegające do krążków obracają się wokół punktów Q i Q′ z prędkością kołową ω. Energia kinetyczna każdego z tych odcinków jest zatem równa

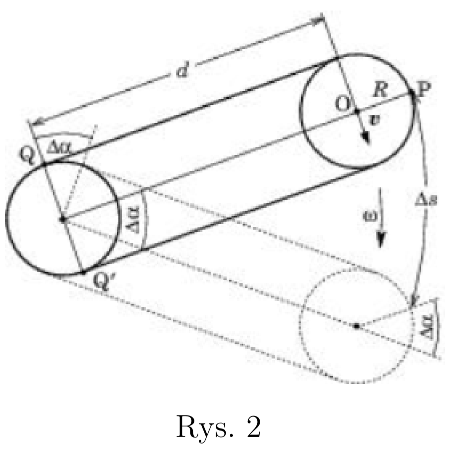
$$E_2 = \frac{I\omega^2}{2}, \tag{5}$$

gdzie moment bezwładności napiętego odcinka liny o długości d względem osi przechodzącej przez punkt Q (Q′) wynosi

$$I = \frac{1}{3}\frac{md}{l}d^2. \tag{6}$$

Korzystając z równań (1) oraz (4 – 6) otrzymujemy energię kinetyczną układu:

$$E = E_1 + 2E_2 = \left(\frac{M}{2} + \frac{m(l + \pi R)}{6l}\right)\omega^2\left(\frac{l}{2} - \pi R\right)^2. \tag{7}$$



Rys. 2