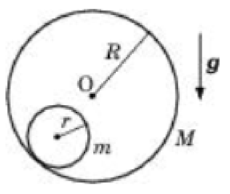
XLVII OLIMPIADA FIZYCZNA
ZADANIA ZAWODÓW STOPNIA III
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Nazwa zadania	Dwie obręcze
Rok	1997/1998
Źródło	Komitet Główny Olimpiady Fizycznej; T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Zadanie T1 - XLVII OF, stopień III.

Cienka, jednorodna obręcz o promieniu R i masie M może obracać się swobodnie w płaszczyźnie pionowej wokół ustalonej osi O, rys. 1. Wewnątrz tej obręczy, w tej samej płaszczyźnie znajduje się mniejsza, też cienka i jednorodna obręcz o promieniu r ($r < R$) i masie m. Mniejsza obręcz podczas ruchu toczy się bez poślizgu po wewnętrznej stronie dużej obręczy. W chwili początkowej obie obręcze są nieruchome, a mała obręcz jest wychylona z położenia równowagi (rys. 1). Przyspieszenie ziemskie ma wartość g.

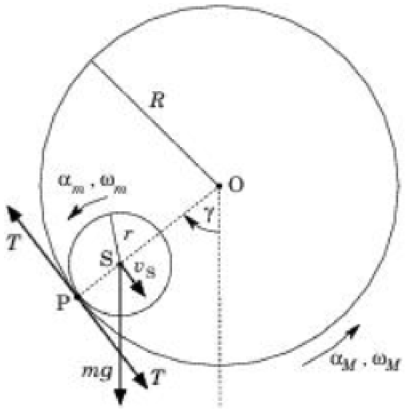


Rys. 1

Oblicz częstość małych drgań układu w dwóch granicznych przypadkach:
1) masa m jest znacznie mniejsza od M ($m \ll M$);
2) masa m jest znacznie większa od M ($m \gg M$).

Rozwiązanie zadania T1 - XLVII OF, stopień III.

Oznaczmy przez α_m, α_M kąty obrotu, małej i dużej obręczy względem układu inercjalnego. Kierunki wzrostu kątów zaznaczono na rysunku 2. Przyjmujemy $\alpha_m = \alpha_M = 0$ w najniższym położeniu małej obręczy.



Rys. 2

W punkcie styku P działa styczna siła tarcia o wartości T. Równania ruchu obręczy mają postać:

$$mr^2\,\dot{\omega}_m = -rT \qquad (1)$$

$$MR^2\,\dot{\omega}_M = RT \qquad (2)$$

gdzie przez ω_m i ω_M oznaczyliśmy prędkości kątowe, a przez $\dot{\omega}_m = \mathrm{d}\omega_m/\mathrm{d}t$ i $\dot{\omega}_M = \mathrm{d}\omega_M/\mathrm{d}t$ przyspieszenia kątowe obręczy. Po podzieleniu stronami powyższych równań otrzymujemy

$$MR\omega_M = -mr\omega_m\ . \qquad (3)$$

1) Z równania (3) widać, że w przypadku $m \ll M$ duża obręcz pozostaje praktycznie w spoczynku (wobec $\omega_M \ll \omega_m$ i warunku początkowego ruchu również $\omega_M \ll \omega_m$). Spełniona jest wtedy zależność

$$r(\alpha_m + \gamma) = R\gamma\ . \qquad (4)$$

Rozważając obrót małej obręczy wokół chwilowej osi obrotu, przechodzącej przez punkt styku P, otrzymujemy równanie ruchu

$$2mr^2\omega_m = -mgr\sin\gamma\ , \qquad (5)$$

gdzie $2mr^2$ jest momentem bezwładności małej obręczy względem osi przechodzącej przez punkt P (tw. Steinera). Z równania (4), po obliczeniu pochodnej czasowej obu stron, otrzymujemy

$$r\omega_m = (R-r)\frac{\mathrm{d}^2\gamma}{\mathrm{d}t^2}\ . \qquad (6)$$

Podstawiamy (5) do (6) przyjmując dla małych kątów $\sin\gamma = \gamma$, co prowadzi do równania

$$2r\omega_m = -g\gamma\ . \qquad (7)$$

Po podstawieniu (6) do (7) otrzymujemy równanie oscylatora harmonicznego,

$$\frac{\mathrm{d}^2\gamma}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{2(R-r)}\gamma = 0\ , \qquad (8)$$

o częstości drgań

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{g}{2(R-r)}} \ . \tag{9}$$

2) W przypadku $m \gg M$ mała obręcz praktycznie nie obraca się względem układu inercjalnego, choć toczy się po dużej obręczy. Jest to możliwe dlatego, że duża obręcz obraca się wokół osi O. Wobec małej wartości stosunku M/m możemy zaniedbać energię kinetyczną dużej obręczy. Środek masy małej obręczy S znajduje się stale w odległości $R - r$ od osi O. Ponieważ mała obręcz przemieszcza się ruchem postępowym, jej energia kinetyczna jest taka, jak w przypadku punktu materialnego o masie m w środku obręczy S. Energia potencjalna obręczy jest również taka sama jak energia punktu materialnego. Częstość drgań układu w przypadku $m \gg M$ jest równa częstości drgań wahadła matematycznego o długości $l = R - r$,

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R-r}} \ . \tag{10}$$

Rozwiązanie ogólne podane przez dwóch uczestników zawodów III stopnia

Zgodnie z warunkiem toczenia w punkcie styku P prędkość liniowa małej obręczy jest równa prędkości liniowej dużej obręczy. Mamy zatem w punkcie P

$$v_{\mathrm{S}} + \omega_m r = \omega_M R \ , \tag{11}$$

gdzie przez v_{S} oznaczyliśmy prędkość środka masy S małej obręczy. Przyspieszenie punktu S wynosi

$$a_{\mathrm{S}} = \frac{mg\sin\gamma - T}{m} \ , \tag{12}$$

a z drugiej strony z równania (11) mamy

$$a_{\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}t} = -r\omega_m + R\omega_M \ . \tag{13}$$

Korzystając z równań (1 – 2) oraz (12 – 13) dostajemy

$$mg\sin\gamma = T\left(2 + \frac{m}{M}\right) \ , \tag{14}$$

co pozwala zapisać równanie (12) w postaci

$$ma_{\mathrm{S}} = mg\sin\gamma - \frac{mg\sin\gamma}{2 + m//M} \ , \tag{15}$$

skąd

$$a_{\mathrm{S}} = \frac{m+M}{m+2M} g\sin\gamma \ . \tag{16}$$

Korzystając z analogii z wahadłem matematycznym o długości $l = R - r$ (przyspieszeniu g odpowiada tu $g' = g(m+M)//(m+2M)$) widzimy, że częstość drgań układu dwóch obręczy wynosi

$$\Omega = \sqrt{\frac{g'}{l}} = \sqrt{\frac{g}{R-r}\frac{m+M}{m+2M}} \ . \tag{17}$$

W przypadkach granicznych dostajemy z równania (17) dla $m \ll M$ wynik (9), zaś dla $m \gg M$ dostajemy wynik (10).