

# XLVIII OLIMPIADA FIZYCZNA

(1998/1999)

## ZAWODY III STOPNIA

### CZĘŚĆ TEORETYCZNA

#### Zadanie teoretyczne – T1

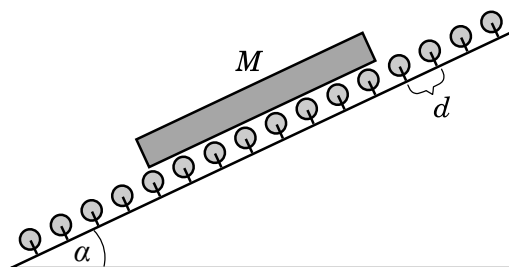
**Nazwa** – Ruch kloca na równi pochyłej z przymocowanymi walcami.

**Źródła** – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej

- Włodzimierz Ungier<sup>1</sup>, Andrzej Wyszmołek<sup>2</sup>, *Fizyka w Szkole* nr 1, 2000, s. 39–44
- Paweł Janiszewski<sup>3</sup>, Jan Mostowski<sup>4</sup> (red.), *50 lat olimpiad fizycznych. Wybrane zadania z rozwiązaniami*. WN PWN, Warszawa 2002, zad. 50, s. 30–31, 130–132
- T.M. Molenda, IF US, [www.OF.szc.pl](http://www.OF.szc.pl).

Na równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha$  zamocowano szereg jednakowych walców. Osie walców przymocowane są do równi w jednakowych odległościach  $d$  od siebie (rys. 1). Moment bezwładności każdego z walców jest równy  $I$ , promień wynosi  $r$ . Po powierzchni walców przemieszcza się klocek o masie  $M$  i długości  $l = nd$ . Każdy walec po zetknięciu z klockiem zaczyna się obracać. Początkowo walec ślizga się względem klocka. Poślizg ten ustaje jeszcze przed zetknięciem się klocka z następnym, niżej leżącym walcem. Ruch pozostałych walców będących w kontakcie z klockiem odbywa się bez poślizgu. Współczynnik tarcia pomiędzy klockiem a każdym z walców jest równy  $f$ .

Przyjmij, że w każdej chwili nacisk klocka rozkłada się równomiernie na wszystkie stykające się z nim walce.



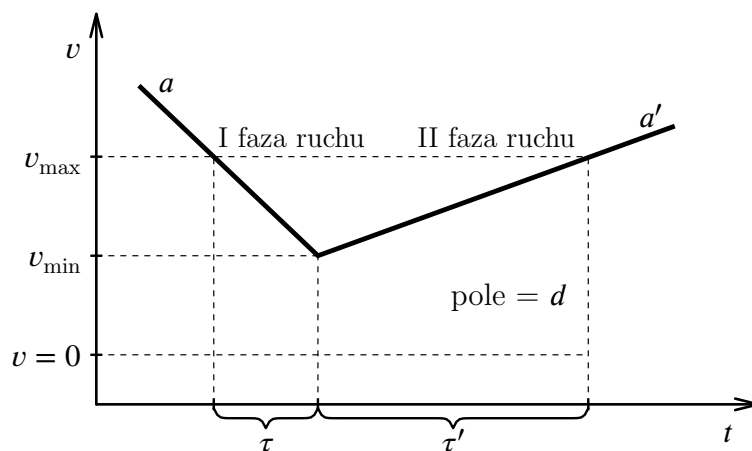
Rys. 1

- Jaki warunek musi spełniać współczynnik tarcia  $f$ , by średnia prędkość klocka była taka sama na kolejnych odcinkach o długości  $d$ ?
- Oblicz tę średnią prędkość.

Zaniedbaj opory tarcia w ruchu obrotowym walców oraz tarcie toczne między klockiem a każdym z walców.

## Rozwiązanie zadania T1 – XLVIII OF, III stopień, część teoretyczna

Założmy, że w pierwszej fazie ruchu, rozpoczynającej się z chwilą zetknięcia kłoca z kolejnym walcem, ruch kłoca jest opóźniony (przyspieszenie  $a$  jest skierowane przeciwnie do kierunku ruchu kłoca), w drugiej fazie zaś, rozpoczynającej się z chwilą ustania poślizgu walca względem kłoca, ruch jest jednostajnie przyspieszony (przyspieszenie wynosi  $a'$ ) (rys. 2). Ponieważ średnia prędkość kłoca na następnym odcinku  $d$  ma być taka sama, więc prędkość początkowa pierwszej fazy ruchu,  $v_p$ , musi być równa prędkości końcowej drugiej fazy ruchu,  $v_k$ . Droga  $d$  jest równa polu powierzchni zakreskowanej. Dolna krawędź figury odpowiada prędkości zero na rys. 2. Widać, że ustalonej wartości  $d$  odpowiada nieskończona rodzina figur (powierzchnia zakreskowana). Całą rodzinę tych figur można sparametryzować czasem  $t$ , podczas którego kłoc przebywa drogę  $d$  (każdej wartości  $t$  można przyporządkować jedną figurę).

Rys. 2<sup>a</sup>

Jeżeli czas trwania pierwszej fazy ruchu kłoca wynosi  $\tau$ , a czas trwania drugiej fazy ruchu wynosi  $\tau'$ , to muszą być spełnione równania

$$t = \tau + \tau' \quad (1)$$

oraz

$$a\tau = a'\tau' = v_{\max} - v_{\min}, \quad (2)$$

skąd

$$t = \tau \left( 1 + \frac{a}{a'} \right). \quad (3)$$

Prędkość średnia na odcinku drogi  $d$  jest z definicji równa

$$v_{\text{sr}} = \frac{d}{t} = \frac{d}{\tau(1 + a/a')}. \quad (4)$$

Z drugiej strony prędkość tę można wyrazić w postaci

$$v_{\text{sr}} = v_{\min} + \frac{a'\tau'}{2} = v_{\min} + \frac{a\tau}{2}. \quad (5)$$

<sup>a</sup> Rys. ten i poprzedni zostały na nowo wykonane i uzupełnione przy oprac. zadania do bazy zad. w KGOF (przyp. red.).

Zachodzi jeszcze związek między czasem  $\tau$  a  $v_{\min}$ . Siła tarcia powodująca przyspieszenie kątowe ślizgającego się walca jest równa  $T = (Mg \cos \alpha)/n$  i jest styczna do powierzchni walca. Zatem jest spełnione równanie ruchu

$$I \frac{a_0}{r} = Tr, \quad (6)$$

skąd otrzymujemy przyspieszenie liniowe punktów na obwodzie walca

$$a_0 = g \frac{(f \cos \alpha)/n}{I/(Mr^2)}. \quad (7)$$

Po upływie czasu  $\tau$  ustaje poślizg walca względem kloca i prędkość liniowa punktów na obwodzie walca staje się równa prędkości kloca, która w tym momencie jest równa  $v_{\min}$ , czyli

$$a_0 \tau = v_{\min}. \quad (8)$$

Równania (4)–(5) wraz z równaniem (8) pozwalają wyrazić prędkość średnią kloca jako funkcję  $d$  oraz trzech przyspieszeń  $a$ ,  $a'$  i  $a_0$ .

### Ruch opóźniony kloca (pierwsza faza ruchu)

Zgodnie z założeniami zadania nacisk kloca na jeden walec wynosi

$$N = \frac{Mg \cos \alpha}{n}, \quad (9)$$

a siła tarcia walca ślizgającego się względem kloca jest równa

$$T = fN. \quad (10)$$

Równanie ruchu kloca ma postać (przyjeliśmy  $a > 0$  w kierunku przeciwnym do ruchu kloca)

$$Ma = T - Mg \sin \alpha - (n - 1)R, \quad (11)$$

gdzie  $R$  jest siłą reakcji każdego toczącego się walca,

$$R = I \frac{a}{r^2}. \quad (12)$$

Z równań (9)–(12) otrzymujemy

$$a = g \frac{(f \cos \alpha)/n - \sin \alpha}{1 + (n - 1)I/(Mr^2)}. \quad (13)$$

### Ruch przyspieszony kloca (druga faza ruchu)

W tym przypadku mamy (przyjeliśmy  $a' > 0$  w kierunku ruchu kloca)

$$Ma' = Mg \sin \alpha - nR', \quad (14)$$

gdzie siła reakcji każdego z walców (kloc toczy się po wszystkich walcach) wynosi

$$R' = I \frac{a'}{r^2}. \quad (15)$$

Z równań (14) i (15) otrzymujemy

$$a' = g \frac{\sin \alpha}{1 + nI/(Mr^2)}. \quad (16)$$

**Odpowiedź (a)**

Na początku wykazaliśmy, że prędkość średnia kłosa na kolejnych odcinkach drogi  $d$  nie ulega zmianie, jeżeli ruch kłosa jest na przemian opóźniony i przyspieszony. Ponieważ  $a' > 0$ , więc musi zachodzić  $a > 0$  (równanie (13)), czyli

$$f > n \operatorname{tg} \alpha.$$

**Odpowiedź (b)**

Prędkość średnia kłosa wyraża się wzorem (otrzymanym z rozwiązania równań (4), (5), (8))

$$v_{\text{sr}} = \sqrt{\frac{d(2a_0 + a)a'}{2(a + a')}},$$

gdzie  $a$ ,  $a'$  i  $a_0$  są określone wzorami (7), (13) i (16).

<sup>1</sup> Włodzimierz Ungier (wówczas dr) był sekretarzem naukowym ds. zadań teoretycznych w KGOF od XL OF do XLXIX OF, w tym okresie był współautorem artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF i książki *Wybrane zadania z 43 olimpiad fizycznych* (laureat XIV OF) (przyp. red.).

<sup>2</sup> Andrzej Wymolek był sekretarzem naukowym ds. zadań doświadczalnych w KGOF: XLIII–XLVIII OF (wówczas dr), LII–LX OF; w tym okresie był współautorem artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF, do czasu ich publikowania w tym czasopiśmie, tj. do LV OF. Od LXIX OF pełni funkcję Przewodniczącego KGOF. Opracowane zad. na zawody OF w postaci edytowalnych plików były przez sekretarza (AW) udostępniane sekretarzowi KO w Szczecinie (TM), co bardzo ułatwiło umieszczenie zad. w bazie na stronie [www.OF.szc.pl](http://www.OF.szc.pl) (przyp. red.).

<sup>3</sup> Dr Paweł Janiszewski – Kierownik Organizacyjny Olimpiady Fizycznej od XLII OF do LVIII OF; był autorem artykułów w *Fizyce w Szkole* (do czasu ich publikowania w tym czasopiśmie, tj. do LV OF), dot. informacji o przebiegu i wynikach olimpiad fizycznych; współautorem ww. książki z zadaniami (przyp. red.).

<sup>4</sup> Prof. dr hab. Jan Mostowski był sekretarzem naukowym ds. zadań w KGOF od XXXVIII OF do XXXIX OF, od L OF do LX pełnił funkcję Przewodniczącego KGOF a od LXIX – wiceprzewodniczący KGOF; był autorem artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF, współautorem ww. książki z zadaniami (przyp. red.).