XLIX OLIMPIADA FIZYCZNA

(1999/2000)

ZAWODY I STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Zadanie teoretyczne – T

Nazwa – Promień świetlny obiegający planetę

Źródła – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej
– Andrzej Wysmołek, sekretarz naukowy ds. zad. teoret. KGOF, IFD UW
– Paweł Janiszewski, Jan Mostowski (red.): *50 lat olimpiad fizycznych. Wybrane zadania z rozwiązaniami.* WN PWN, Warszawa 2002
– T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Zadanie T3 - XLIX OF, I stopień

Kulistą planetę o promieniu R otacza przezroczysta atmosfera, rozciągająca się na dużą wysokość ($> R$) nad powierzchnię. Współczynnik załamania światła w tej atmosferze zmienia się wraz z wysokością zgodnie ze wzorem $n = n_0 - \alpha h$ i przyjmuje wartości z zakresu od $n = 1$ do $n = n_0$. Na jakiej wysokości h nad powierzchnią planety promień świetlny może obiegać planetę po okręgu?

Rozwiązanie zadania T3 - XLIX OF, I stopień

Zgodnie z równaniem $n = c/v$ prędkość światła w ośrodku jest równa:

$$v = \frac{c}{n_0 - \alpha h}. \tag{1}$$

Jeżeli na wysokości h promień obiega planetę po okręgu, to czas obiegu jest równy:

$$t = 2\pi \frac{R+h}{v} = \frac{2\pi(R+h)(n_0 - \alpha h)}{c}. \tag{2}$$

Czoło fali świetlnej musi być prostopadłe do łuku okręgu, zatem promień biegnący po okręgu na wysokości $h' = h + \Delta h$ ($\Delta h \simeq 0$) musi okrążać planetę w takim samym czasie t. Mamy więc równość:

$$(R+h)(n_0 - \alpha h) = (R+h')(n_0 - \alpha h'). \tag{3}$$

Z dokładnością do wyrazów liniowych w Δh otrzymujemy z (3) równanie:

$$0 = \Delta h n_0 - \Delta h (R + 2h)\alpha, \tag{4}$$

skąd:

$$h = \frac{n_0/\alpha - R}{2}. \tag{5}$$

Uwaga! Można zbadać warunki zadania.
Na otrzymanej wysokości h współczynnik załamania światła jest równy $n = (n_0 + \alpha R)/2$. Ponieważ $n > 1$, to musi zachodzić nierówność $\alpha > \alpha_0 = (2 - n_0)/R$. Można więc podać ograniczenie na wartość wysokości h. Największej wartości h odpowiada najmniejsza wartość α, zatem $h < (n_0/\alpha_0 - R)/2 = R(n_0 - 1)/(2 - n_0)$. Ponieważ α_0 musi być dodatnie, to $n_0 < 2$.